第8章　産業連関分析の方法

第1節　経済の予測分析

第1部第4章において産業連関分析の基礎となる投入係数，逆行列係数等の意味と計算方法について説明し，また，前章においては産業連関表を用いて日本経済の現状分析を行ってきたが，以下では，将来の経済構造を予測する手法について説明する。これは経済施策の評価や経済計画の企画・策定などにも共通することである。

なお，この手法は種々の工夫を容れる融通性に富んでいるので，そのすべてを尽くすことはできない。したがって，ここではその基本について述べる。

また，この手法は次の事柄が基礎になっている。

① 各産業部門の最終需要が与えられた場合，それを満たすために必要な各産業部門の生産額を求める。

② 各産業部門の生産額が与えられた場合，それらが満たされる各産業部門の最終需要額を求める。

③ 賃金や運賃など公共料金の上昇額が与えられた場合，各産業部門の生産物価格を求める。

1.　国内生産額予測

産業連関分析の基礎となる投入係数や逆行列係数について説明した際（第1部第4章）に，輸入の扱いによるいろいろなモデルの逆行列係数の得失に触れたが，いま分析に用いるモデルを

$$X=[I-(I-\hat{M})A]^{-1}[(I-\hat{M})F+E]\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

によることとし，予測年次の最終需要額の見通しを，①輸出ベクトルEと②輸出を除く最終需要ベクトルのうち国産品に対する最終需要額（$I-\hat{M}$）Fの別に，上式によって計算を行えば，予測年次の産業部門別生産額Xが求められる。

ここで，予測年次の最終需要額の見通しの立て方については，次の二つの立場が考えられる。

(1) 例えば，公共投資の実施，輸出の増加など，実行可能なある意図をもって，種々の変化を見通しに織り込み，予測された将来の経済構造の中にその効果を確かめる。

(2) 特定の意図を持たずに，自然の成り行きだけを見通しに織り込み，予測された将来の経済構造の中での欠陥の有無を探る。

(1)に関連して，例えば将来における外国からの商品の需要，即ち我が国の輸出構造に変化がある場合に，我が国の産業水準がどう変化するかを見る場合を考える。既に，計算されている164部門の逆行列係数 $[I-(I-\hat{M})A]^{-1}$ を用いることとし，輸出Eの将来見通し，即ち，例えば自動車，テレビ，音響機器などの民生用電気機械，衣料品等164部門別に，どれ位の水準になるかの列ベクトルEを用意して，行列演算を行えば輸出の変化による産業別の生産水準がどうなるか，更には，雇用者所得，営業余剰等がどうなるかを求めることができる。

なお，上のモデル又は類似のモデル式を用いる場合に，家計消費支出額が雇用者所得額と自動的には連動していないことに注意する必要がある。

例えば，公共投資が実施されると，それは一般に，

$\boxed{\text{公共投資の実施}}\rightarrow\boxed{\text{各産業部門の生産額の増加}}\rightarrow\boxed{\text{各産業部門の雇用者所得額の増加}}\rightarrow\boxed{\text{家計の消費支出額の増加}}$

という経過をたどって，再び最終需要額の増加が誘発されるはずであるが，この最後の部分が上のモデル又は類似のモデル式には織り込まれていない。このことは，雇用者所得と家計消費支出のほかに，営業余剰と固定資本形成，間接税と政府消費支出のような部門間にもあり，付加価値と最終需要とが自動的には連動していない。従って，これらの関係を織り込んだ波及効果を求めるには，改めて上のモデル式を用いてそこだけを求めていくか，或いは上のモデル式にこれが自動的に連動するような装置を，取り付ける工夫をする必要がある。

2.　最終需要額予測

同様にして，予測年次の産業部門別生産額の見通しが与えられれば，この生産額を前掲(1)式から

$$(I-\hat{M})F+E=(I-A+\hat{M}A)X$$

に代入して，予測年次の産業部門別最終需要額が求められ，やはり予測年次の経済構造が明らかにされる。

ところで，このような将来の経済構造の予測を行うに当たっては，常に投入係数や輸入係数の安定性，与えられた産業部門別最終需要額や国内生産額の妥当性，価格体系の変化などについて注意する必要がある。このような注意は産業連関表の対象年次と経済構造の予測年次とが離れれば離れるほど大切になってくる。

なお，これらの問題をどのように取扱ったら良いかについては，普遍性のある解決方法はまだない。従って，利用目的に沿って，適宜，処理していくことにならざるを得ない。

3. 価格分析

これまでの分析は，産業連関表を行方向にみた物量バランスによる分析であった。これに対してこれから述べる分析は，

産業連関表を縦方向にみた価格分析である。

投入係数と投入品のそれぞれの価格を用いて取引基本表を表せば，次のとおりとなる。

	産業 1 (農業品)	産業 2 (工業品)
産業 1 (農業品)	$a_{11}P_1$	$a_{12}P_1$
産業 2 (賃金)	$a_{21}P_2$	$a_{22}P_2$
付加価値 (賃金)	W_1	W_2
	P_1	P_2

ここで，農業品の価格を P_1，工業品の価格を P_2 とする。農業品の価格 P_1 はインプットの費用（農業品 a_{11} 単位分の費用 $a_{11}P_1$ と，工業品 a_{21} 単位の費用 $a_{21}P_2$）及び賃金 W_1 から構成されていると考え，縦の関係をみた価格バランス式を表すと，

$$a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + W_1 = P_1$$

が成り立つ。工業品についても同様に

$$a_{12}P_1 + a_{22}P_2 + W_2 = P_2$$

が成り立つ。

これを行列表示すると，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

となる。投入係数を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

と定義すれば，上式の a_{ij} 行列は A の要素が転置した形をしている。すなわち，

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

となり，

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$$

とし，上式も簡単に示せば，

$$A'P + W = P$$

となる。これらを用いて，

$$P - A'P = W$$

$$(I - A')P = W$$

従って，$P = (I - A')^{-1}W$

が得られる。ここで，

$$X = (I - A)^{-1}Y$$

と比較すると，全く同一の形をとっていることが分かる。後者は最終需要Yを与えることによって，逆行列係数 $(I - A)^{-1}$ により生産額Xが求められるのに対して，前者は賃金Wが与えられると，波及構造 $(I - A')^{-1}$ により価格Pが定められることになっている。

ここで注意しなければならないのは，一方では投入係数Aが用いられているのに対して，他方ではその転置行列 A′ が用いられていることである。

このように，産業連関分析では生産額予測分析，需要予測分析及び価格分析があり，形式的には全く対照的（正確には双対）である。価格分析は，シャドウ・プライス的な意味が濃く，現実の価格のニュアンスとかなり異なっているため，相対価格としての使われ方，例えば賃金上昇に伴う物価上昇の分析や，運賃などの公共料金の値上げに伴う物価上昇の分析などに用いられることが多い。しかし，価格分析については，価格が無限に波及して行くかどうかについての疑問，つまり各部門のクッションがかなり波及をくい止めるのではないかなどの理由によって，その利用頻度は前者の分析に比べて低く，産業連関分析の主流は，やはり生産又は物量分析にあるといわざるを得ないこととなっている。

第２節　道路整備による効果の推計に関する調査研究

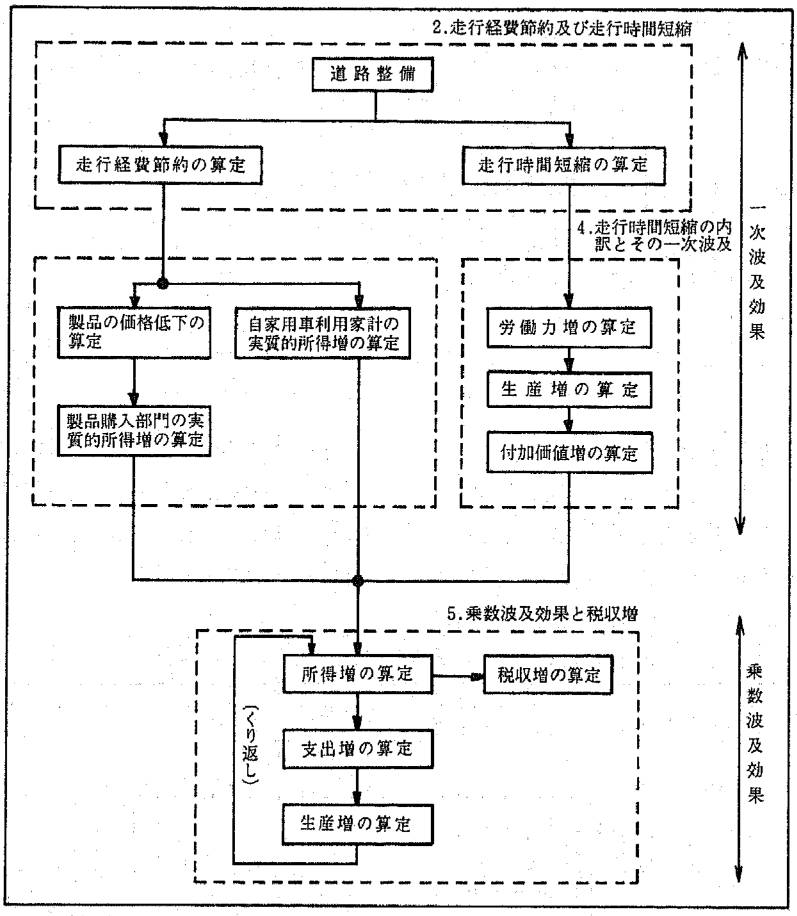
——第８次道路整備五箇年計画の税収増効果の推計——

1.　調査概要

本調査は，第８次道路整備五箇年計画の税収増効果を中心に経済効果を体系的にとりまとめることを目的とするものである。

道路の整備は，走行経費の節約と走行時間の短縮という直接的な効果（便益）をまず生み出す。走行経費の節約は，家計に対しては実質的な所得増を生み出し，各産業に対しては，輸送コストを押し下げることによって製品価格を下げ，その購入者の実質的な所得を増加させる。一方，走行時間の短縮は，労働力（労働可能時間）の増加を生み，生産の増加を通じて最終的に所得（付加価値）を増加させる。これらを第一次の波及効果と呼ぶ。この一次波及効果によって生まれる所得は，所得増 → 支出増 → 生産増 → 所得増……というサイクルを繰り返すことによって，乗数効果を生み出す。そして，産業部門，家計部門への乗数的波及の中で，税収の増加が生じる。

〈第８－１図　道路整備の効果の推計フロー〉

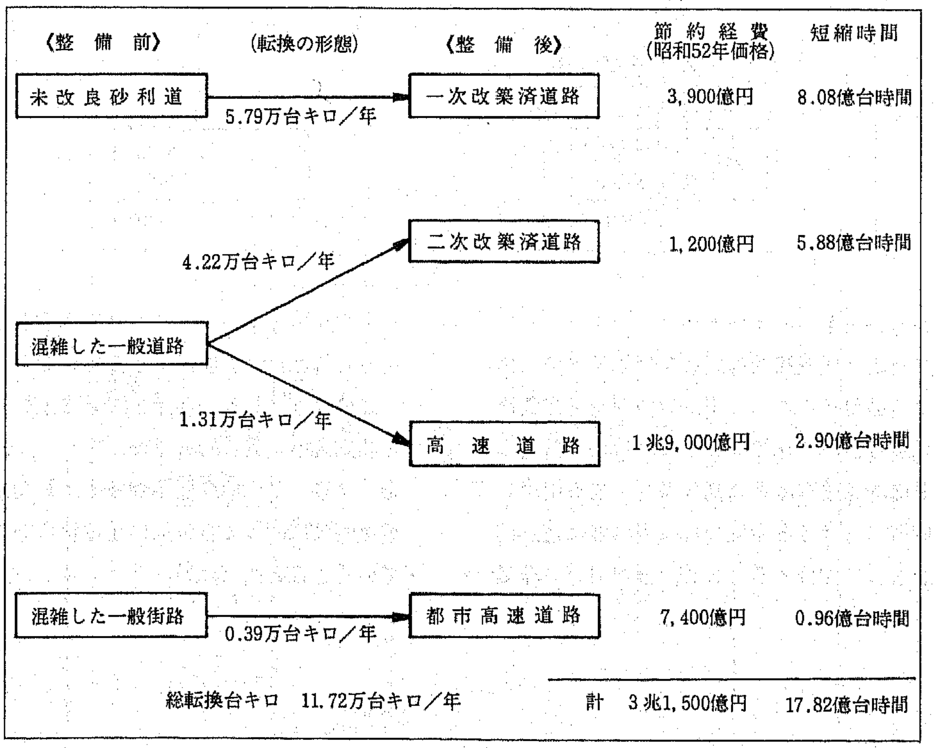


これらの調査成果を，[　] 内の各部分に章だてして，以下紹介することとする。

2.　走行経費節約及び走行時間短縮の効果

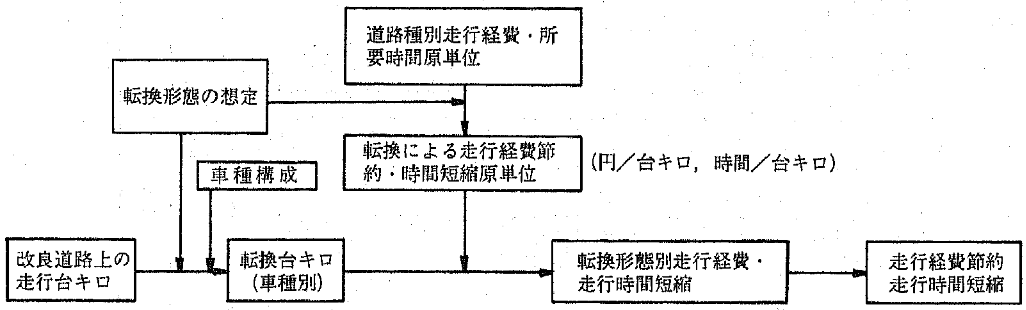
第８次道路整備五箇年計画は，昭和57年度に完了する予定

〈第８－２図　道路整備による発生便益(58年度)〉



となっている。完了後の１年間（昭和58年度）において，〈第８－２図〉に示す交通量の転換により走行経費節約，走行時間短縮の効果が現出する。

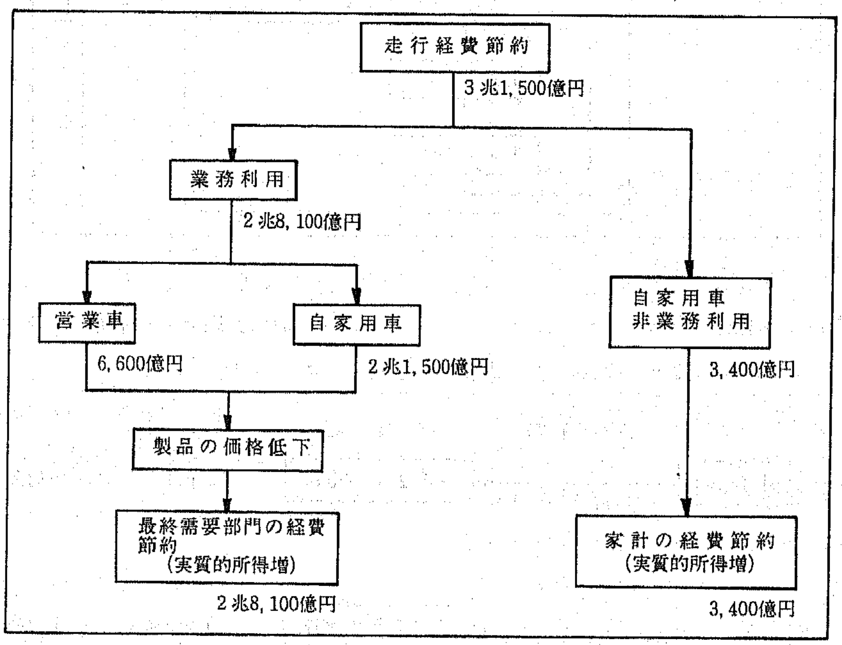
〈第８－３図　走行経費節約・走行時間短縮の算定〉



3.　走行経費節約の内訳とその一次波及

道路整備による昭和58年度１年間の走行経費の節約額は，３兆1,500億円である。この走行経費節約は，業務利用の自動車については製品価格の低下を通じて，家計部門，企業部門，政府部門等の最終需要部門の実質的所得増となる。業務以外の自家用車については，家計部門の経費の節約となる。これらの一次波及効果は，走行経費節約が形を変えたものであり，〈第８－４図〉に示すように総額ではやはり３兆1 500億円となっている。

〈第８－４図　走行経費節約の内訳とその一次波及〉



(1)　走行経費節約の各産業への配分方法

車種別に推計した走行経費節約は，波及効果算定のために各産業に配分する必要がある。まず，車種別走行経費節約を保有形態別に走行台キロ比で配分する。次に，営業車については走行費節約を輸送産業に割り振り，自家用車については産業連関表における各産業の自家用旅客輸送部門への投入額の比をもって配分する。なお，自家用車の非業務目的利用分については，家計へ帰属し，実質的な所得になるものとして別途計上されている。

このようにして，各産業ごとに配分した走行経費節約は，付加価値増（実質的所得増）として，家計外消費支出，賃金・俸給，その他の雇用者所得，営業余剰の各項目別に産業連関表における各付加価値項目の額の比をもって配分している。（第８－１表）

〈第8－1表　走行経費節約の配分〉

車　種	保有形態（走行台キロ比）注1)	トリップ目的 注1)	付加価値の帰属主体	付加価値増	価格波及	
					関連取引業	家　計
バ　ス	自家用（56.0%）	業　務	全産業	自動車保有産業の付加価値増	取引業の付加価値増	実質的所得増
	営業用（44.0%）	業　務	輸送産業	輸送産業の付加価値増		
乗用車	自家用（98.7%）	業　務（65%）	全産業	自動車保有産業の付加価値増		
		非業務（35%）	家　計	実質的所得の増加		
	営業用（1.3%）	業　務	輸送産業	輸送産業の付加価値増		
普通貨物車	自家用（52.0%）	業　務	全産業	自動車保有産業の付加値増		
	営業用（48.0%）	業　務	輸送産業	輸送産業の付加価値増		
小型貨物車	自家用（95.2%）	業　務	全産業	自動車保有産業の付加価値増		
	営業用（4.8%）	業　務	輸送産業	輸送産業の付加価値増		

注1)　節約経費の保有形態別及びトリップ目的別への配分は，昭和52年全国道路交通情勢調査の走行台キロ比による。

(2)　製品の価格低下による走行経費節約の他産業への波及の算定

走行経費節約は，各産業の付加価値増になるか，又は製品の価格低下として他の産業に波及し，最終的には最終需要部門の実質的所得増となるかである。後者の場合には，第t次の波及後の価格$P^{(t)}$は，各産業の走行経費節約を，その産業の国内生産額で除した最初の価格低下を$\triangle S$，投入係数をA，各製品の国内自給率をαとしたとき，次式で表される。

$$P^{(1)} = \triangle S + \alpha A \triangle S \quad ①$$

$$P^{(t)} = \triangle S + \alpha A P^{(t-1)} \quad ②$$

これらの式は，製品の価格低下が，輸送コストの低下と原材料の価格低下の和であることを表している。①，②式より，最終的な各製品の価格低下$\triangle P$は次のように表される。

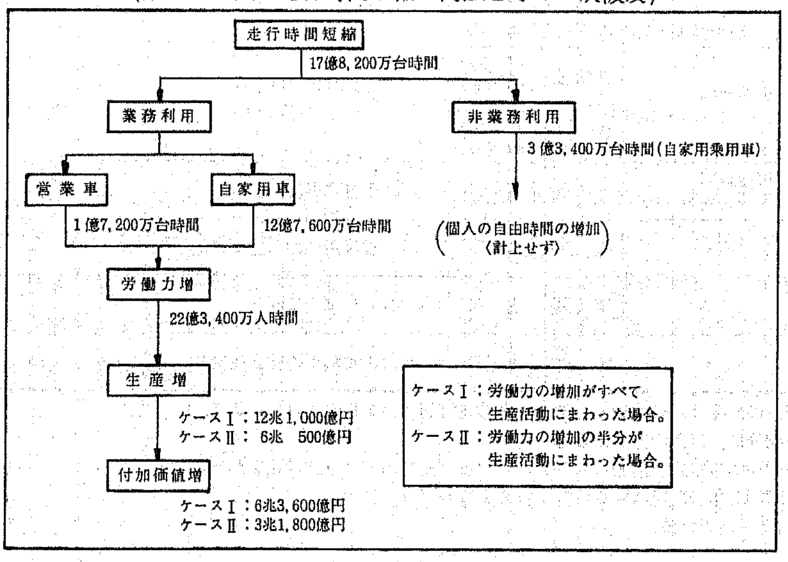
$$\triangle P = [I - (\alpha A)^{\blacktriangledown}]^{-1} \triangle S \quad ③$$

そして，$\triangle P$に各最終需要部門の消費額のうち国内供給分を乗ずれば，価格波及後の実質的所得増を計算することができる。

4.　走行時間短縮の内訳とその一次波及

道路整備による昭和58年度1年間の短縮走行時間は，17億8,200万台時間である。走行経費節約の場合と同様に，時間

〈第8－5図　走行時間短縮の内訳とその一次波及〉



短縮の一次波及は，業務利用か否かによって波及の形態が異なる。業務目的の自動車については，各産業の労働力の増加となり，この労働力増を生産活動にまわすことによって全産業で生産増と付加値増を生み出す。この走行時間短縮による労働力増がすべて生産活動にまわった場合は，12兆1,000億円の生産増，6兆3,600億円の付加価値増（所得増）となる。また，業務以外の自家用自動車の時間短縮は，個人の自由時間を増加させることによって，日常生活を豊かにするものである。しかし，この効果を金額換算することは困難であるので，以下の効果算定においては計上されていない。

(1) 短縮人時間の算定

車種別に推計した走行時間短縮は，各産業に配分し，これによる生産増，付加価値増の算定を行う。まず，走行経費節約と同時に，時間短縮を各車種の保有形態別に走行台キロ比をもって配分する。

次に，自家用車については，産業連関表における自家用輸送部門（旅客及び貨物）への投入額の比をもって配分し，平均乗車人員を乗じて短縮人時間を算出する。営業車については，乗用車・バスと貨物車の二つに分けて考える。営業用の乗用車・バスは，輸送産業で運転手1人分を計上し，非輸送産業では，旅客輸送産業への投入額比で配分したのち，平均の乗客の人数を乗じている。営業用の貨物車については，平均乗車人員分を輸送産業において計上している。

なお，平均乗車人員は次の値が用いられている。

自家用バス	17.3 人/台(運転手を含む)	…昭和53年陸運統計要覧により算定
営業用バス	14.3 人/台(〃 を除く)	
自家用乗用車	1.3 人/台(〃 を含む)	
営業用乗用車	0.85人/台(〃 を除く)	
貨物車	1.35人/台(〃 を含む)	…昭和53年首都高速道路OD調査による

(2) 生産増の算定

短縮された人時間は，労働力増として生産増に転換されると考えられており，その算定は次式によっている。

$$\text{各産業の生産増}=\left(\begin{array}{c}\text{各産業の時間}\\\text{当たり給与所得}\end{array}\right)\times\frac{(\text{各産業の生産額})}{(\text{各産業の雇用者所得})}\times(\text{各産業の労働力増})\times\beta$$

ただし，βは短縮時間のうち労働力増となる割合で，$\beta=0.5$と$\beta=1.0$の二つの場合について計算が行われている。

〈第8－2表　走行時間短縮による付加価値増〉

車種	保有形態(走行台キロ比)注1)	労働力増(人時間)への換算	帰属主体			
			産業	目的注2)	生産増	付加価値増
バス	自家用(56.0%)	短縮時間×乗車人数	全産業	業務	$\left(\begin{array}{l}\text{利用産業における}\\\text{時間あたり給与所得}\end{array}\right)\times\frac{\text{生産額}}{\text{給与所得}}\times\text{労働力増}\times\beta$	左記の生産増に伴う付加価値増を一次波及分とする。
	営業用(44.0%)	短縮時間	輸送	業務	$\left(\begin{array}{l}\text{輸送産業における}\\\text{時間あたり給与所得}\end{array}\right)\times\frac{\text{生産額}}{\text{給与所得}}\times\text{労働力増}\times\beta$	
		短縮時間×乗客人数	非輸送	業務(3.9%)	自家用に同じ	
			家計	非業務(96.1%)	効用の増加（計上せず）	
乗用車	自家用(98.7%)	短縮時間×乗車人数	全産業	業務(65.0%)	バスの自家用に同じ	
			家計	非業務(35.0%)	効用の増加（計上せず）	
	営業用(1.3%)	短縮時間	輸送	業務	バスの営業用に同じ	
		短縮時間×乗客人数	非輸送	業務(80.0%)		
			家計	非業務(20.0%)		
普通貨物	自家用(52.0%)	短縮時間×乗車人数	全産業	業務	バスの自家用に同じ	
	営業(48.0%)	〃	輸送	業務	バス営業用の輸送産業に同じ	
小型貨物	自家用(95.2%)	〃	全産業	業務	バスの自家用に同じ	
	営業用(4.8%)	〃	輸送	業務	バスの営業用の輸送産業に同じ	

注1) 短縮時間の保有形態別への配分は，昭和52年全国道路交通情勢調査の走行台キロ比による。

注2) 短縮時間の目的別への配分は，以下の方法によっている。

営業用バス…………昭和53年東京都市圏パーソン・トリップ調査のトリップ数比を参考に設定。

自家用乗用車………昭和52年全国道路交通情勢調査の走行台キロ比による。

営業用乗用車………(ケース設定値)

(3) 生産増に伴う付加価値増の算定

各産業で時間短縮によって生じた生産増は，ちょうどその産業に対する中間需要及び最終需要財の生産に一致するものとする（第8－6図）。このため，顕現した最終需要をFとすると，〈第8－7図〉に示すように，

$$\triangle X = (I - A)^{-1} F$$

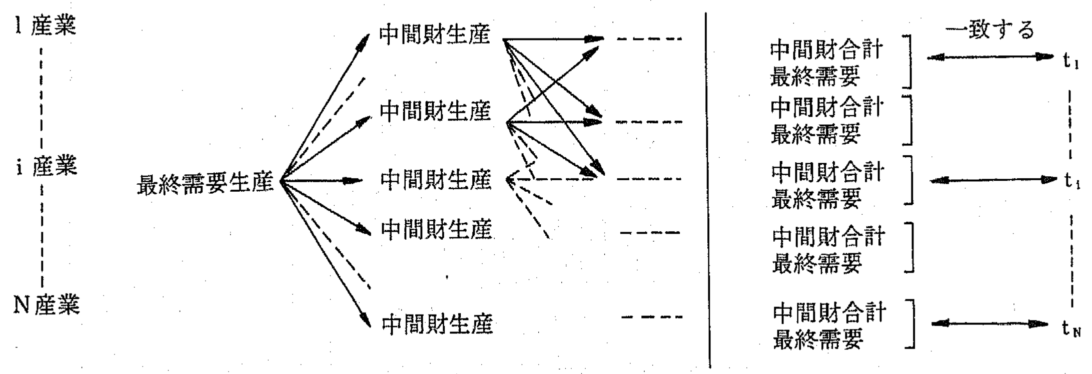
$$\triangle X = t \cdot T$$

となる。ただし，tは短縮時間，△Xは生産増，Tは時間当り生産増である。従って，付加価値増△Yは，付加価値率をWとすると，

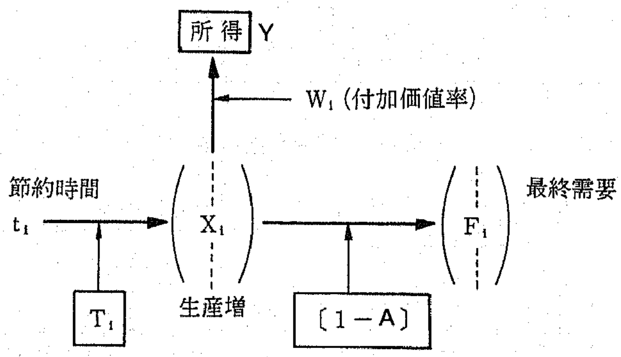
$$\triangle Y = W \cdot \triangle X$$

となる。

〈第8－6図　走行時間短縮による生産増と最終需要，中間財の合計〉



〈第8－7図　走行時間短縮による生産増・付加価値増〉



なお，営業余剰が負である産業については，付加価値増が他の付加項目にまわるものと考え，営業余剰を0として，付加価値率計は一定としたまま再配分を行っている。

5.　乗数波及効果と税収増

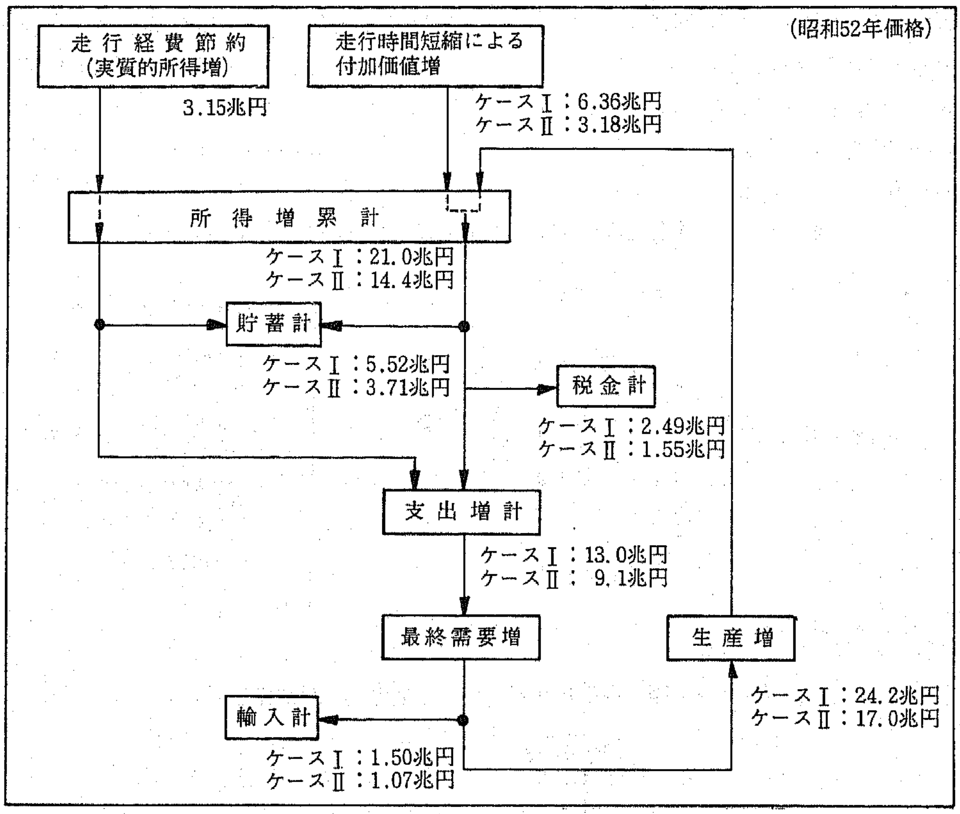
(1) 所得増と税収増

走行経費節約による実質的所得増と走行時間短縮による付加価値増は，〈第8－8図〉に示すように税金と貯蓄を除いて支出増となり，最終需要増を生み出す。この需要増は，最終財の生産増と，その生産に必要な中間財の生産増を発生させる。この生産増により各企業は，営業余剰，雇用者所得などの付加価値増を生み出す。そして，この付加価値の一部は，税・貯蓄となるが，大半は再び支出となり，最終需要を生む。この乗数波及過程が繰り返されることにより，付加価値が生み出され，税収増となる。昭和58年度の走行経費節約・時間短縮効果が最終的に生み出す所得増は，ケースⅠでは21.0兆円であり，これに対応する税収増は2.49兆円である。

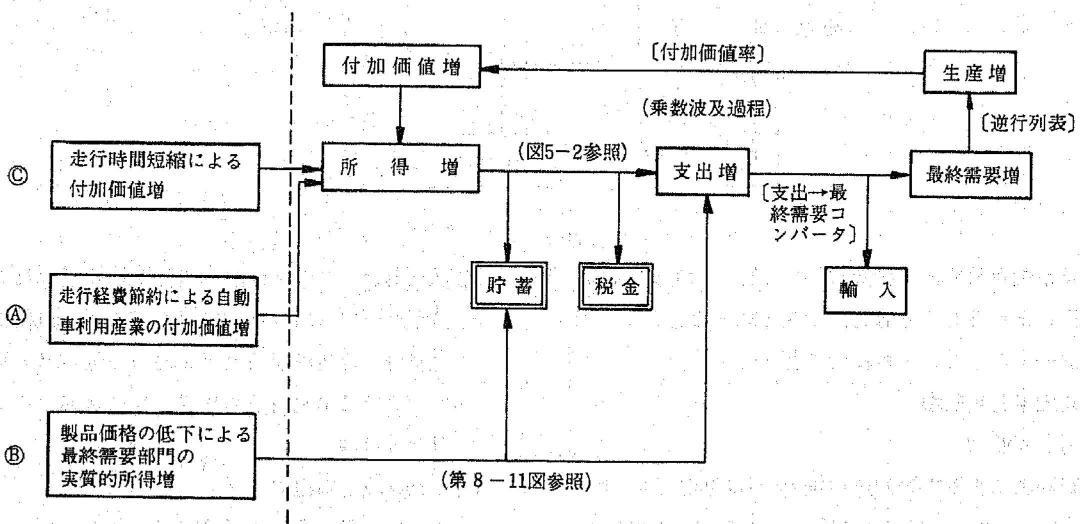
(2) 乗数波及過程

走行経費節約及び走行時間短縮によって生み出された付加価値増は，〈第8－8図〉に示すように税金及び貯蓄を除いて支出となり，再び最終需要を発生することになる。そして，この最終需要増はさらに生産増，付加価値増をもたらす。この繰り返しの過程が乗数波及過程と呼ばれるものである。

〈第８－８図　乗数波及過程〉



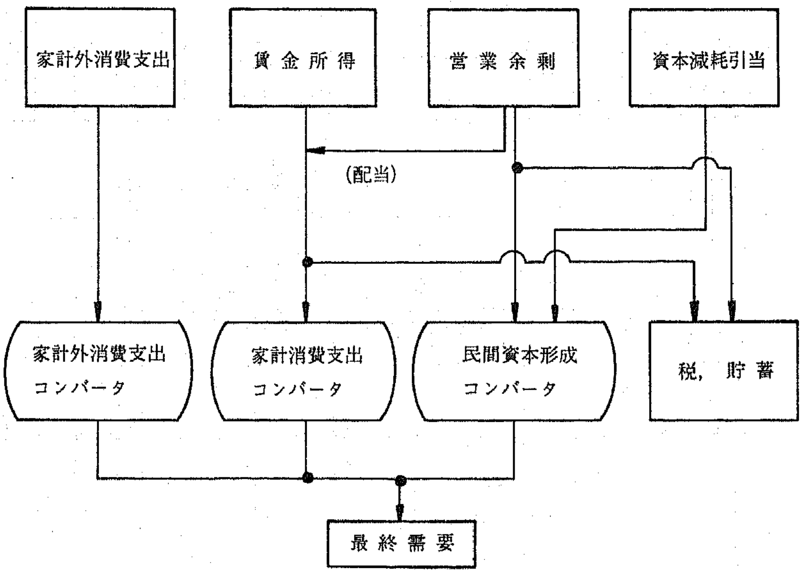
〈第８－９図　乗数波及課程〉



注1)　ⒶとⒷの和は総走行経費節約に一致する。
2)　付加価値率，投入係数表，支出→最終需要コンバータは，昭和50年全国産業連関表に基づく。

各付加価値は，(第８－９図)に示すように，税金，貯蓄に吸収され，支出の形成にまわるが，その割合をパラメータとして設定したものが第８－３表である。ここでＺ1，Ｚ2，Ｚ3，Ｚ4はそれぞれ所得に対する所得税，個人住民税，法人税，法人住民税の比率，SHは家計の貯蓄率，SCD1は企業の税引後営業余剰に対する投資率である。なお，産業連関表の分類における営業余剰には，家計への配当も含まれているため，(第８－10図)に示すように，この配当分をまず賃金所得に加えてから以下の配分を行っている。

〈第８－10図　付加価値増からの最終需要形成フロー〉



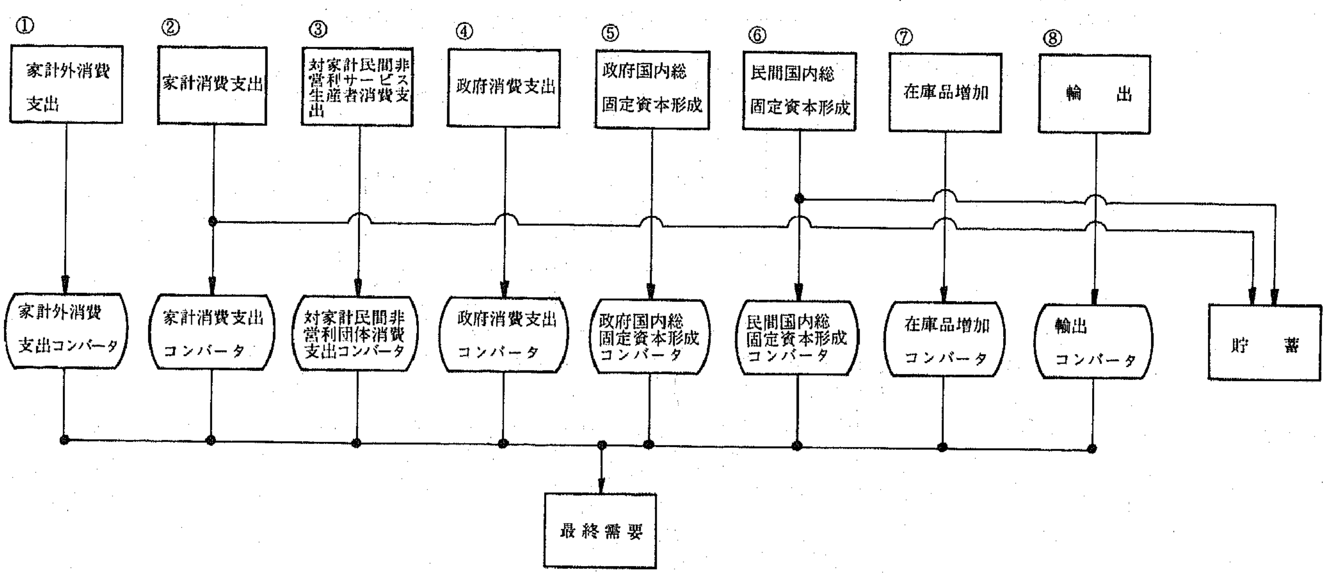
注)：コンバータとは，費目別支出を品目別最終需要に交換するものであり，産業連関表における最終需要部門の投入構成を用いている。

〈第８－３表　付加価値から支出への変換比率〉

配分先＼付加価値		家計外消費支出	賃金所得（配当を含む）	営業余剰（家計への配当を除く）	資本減耗引当
家計外消費支出		1	0	0	0
家計消費支出		0	$(1-Z1-Z2)(1-SH)$	0	0
民間投資		0	0	$(1-Z3-Z4)\times SCD1$	1
貯蓄		0	$(1-Z1-Z2)\times SH$	$(1-Z3-Z4)(1-SCD1)$	0
税金	所得税	0	Z1	0	0
	個人住民税	0	Z2	0	0
	法人税	0	0	Z3	0
	法人住民税	0	0	Z4	0
	間接税	0	0	0	0

なお，価格低下に伴う購入部門の実質的所得増は，既に最終需要部門別になっているので，第８－11図の流れに従って変換した後，乗数波及過程へ入る。

〈第８－11図　価格低下による最終需要の形成〉



第３節　変動要因分析について

産業連関分析は，２時点の産業連関表を用いることにより，分析の範囲を拡大することができる。つまり均衡産出高モデルを基にして，生産誘発額，付加価値誘発額，各種消費誘発額などの変動を要因別に分解することが可能である。この分析を行うときに用いる分析モデルをわれわれは「変動要因分析モデル」と呼んでいる。

まず，生産誘発額の変動分を生産技術（逆行列係数），最終需要という要因別にみてどのくらい変動しているかを知ることができる生産変動要因分析モデルから説明する。

1．生産変動要因分析

(1)　基礎式

生産誘発額（X）は，生産技術（B）と最終需要（F）との積で求めることができるから，生産誘発額の変化分（△X）は，次のように表わすことができる。（以下，O：基準年，t：比較年，△：変化分を示す。）

$$
\begin{aligned}
\triangle X &= X^t - X^0\\
&= B^t F^t - B^0 F^0\\
&= (B^0 + \triangle B)(F^0 + \triangle F) - B^0 F^0\\
&= B^0 \cdot \triangle F + \triangle B \cdot F^0 + \triangle B \cdot \triangle F \quad \text{——①}
\end{aligned}
$$

［基準年の生産技術構造］［最終需要の変化分］＋［生産技術構造の変化分］［基準年の最終需要］＋［生産技術構造の変化分］［最終需要の変化分］

［生産誘発額の変化分］＋［最終需要の変化による変動分］＋［生産技術構造の変化による変動分］＋［交絡項両者の変化による変動分］

(2)　最終需要要因の分解

さらに，①式の右辺の第１項 $B^0 \triangle F$ のうちの最終需要の変動部分△Fは次のように分解することができる。

いま，c：配分行列（最終需要項目別の品目別構成比）（m×n）

e：配分係数ベクトル（最終需要計に対する各最終需要の構成比）（1×n）

$\hat{e}$：eの対角行列（n×n）

ϕ：最終需要計…………スカラー

とすると，最終需要Fは②式のように，c，$\hat{e}$，ϕ の三つの要因で表わすことができる。

$$F = c\hat{e}\phi \quad \text{——②}$$

		最終需要項目
		1　2　………　n
品目	1 2 ⋮ m	c
		e

従って，最終需要Fの変動分（△F）は，③式のように分解できる。

$$
\begin{aligned}
\triangle F &= F^t - F^0\\
&= c^t\hat{e}^t\phi^t - c^0\hat{e}^0\phi^0\\
&= (c^0 + \triangle c)(\hat{e}^0 + \triangle\hat{e})(\phi^0 + \triangle\phi) - c^0\hat{e}^0\phi^0\\
&= c^0\hat{e}^0\triangle\phi + c^0\triangle\hat{e}\phi^0 + \triangle c\hat{e}^0\phi^0 + c^0\triangle\hat{e}\triangle\phi\\
&\quad + \triangle c\hat{e}^0\triangle\phi + \triangle c\triangle\hat{e}\phi^0\\
&\quad + \triangle c\triangle\hat{e}\triangle\phi \quad \text{——③}
\end{aligned}
$$

よって，③式を①式に代入することにより変動要因をより詳細に読みとることができる。このことを言葉で説明すると以下のとおりである。

① $B^0c^0\hat{e}^0\triangle\phi$ によって………最終需要の規模の変化の影響

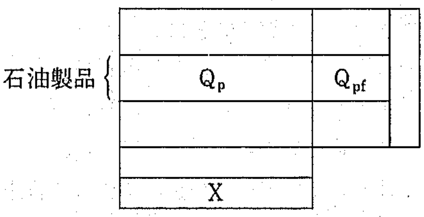
② $B^0c^0\triangle\hat{e}\phi^0$ によって………最終需要項目間の構成変化の影響

③ $B^0\triangle c\hat{e}^0\phi^0$ によって………最終需要項目別の品目間の構成変化の影響

2. エネルギー消費変動変因分析

以上の考え方を適用することにより，エネルギー問題，雇用問題，サービス化経済問題，資源問題等についても同様に変動要因分析を行うことができる。その一例としてエネルギー消費変動要因分析について説明する。

(1) モデル式



ただし Q_p：石油製品の中間需要
Q_{pf}：石油製品の最終需要
X ：生産額

石油製品の総需要を $Q'p$ とすると

$$Q'p = Qp + Qpf \quad \text{——④}$$

石油製品の原単位をHとすると

$\hat{H} = Qp/X$ （＾は対角化を表わす）

$$\therefore Qp = \hat{H}X \quad \text{——⑤}$$

⑤式を④式に代入すると

$$Q'p = \hat{H}X + Qpf$$

$$\therefore Q'p = \hat{H}BF + Qpf \quad \text{——⑥}$$

よって石油製品消費量の変動要因分析モデル式は，以下のように示される。

$$\begin{aligned}\triangle Q'p &= Q'p^t - Q^0p \\ &= (\hat{H}^tB^tF^t + Q^tpf) - (\hat{H}^0B^0F^0 + Q^0pf) \\ &= (\hat{H}^0 + \triangle\hat{H})(B^0 + \triangle B)(F^0 + \triangle F) + (Q^0pf + \triangle Qpf) - \hat{H}^0B^0F^0 - Q^0pf \\ &= \triangle\hat{H}B^0F^0 + \hat{H}^0\triangle BF^0 + \hat{H}^0B^0\triangle F + \triangle Qpf \\ &\quad + (\triangle\hat{H}\triangle BF^0 + \hat{H}^0\triangle B\triangle F \\ &\quad + \triangle\hat{H}B^0\triangle F + \triangle\hat{H}\triangle B\triangle F)\end{aligned} \quad \text{——⑦}$$

（石油製品消費量の変動）＝（石油製品の原単位の変化による変動）＋（生産技術構造の変化による変動）＋（最終需要の変化による変動）＋（石油製品の直接最終消費の変化による変動）＋（原単位の変化，生産技術構造の変化，最終需要の変化の交絡項による変動）

(2) 応用

エネルギー消費変動要因分析において，原単位の変動分△Hを，代替エネルギー効果と省エネルギー効果という2要因に分解し，分析を進めることにより，現在のエネルギー消費の変動の実態をさらに深く追求することが可能となる。ここでは，要因の分解式を石油製品を例にとって示すと次式のようになる。

$$\begin{aligned}H_P &= Q_P/X \\ &= (Q_P/Q_T)\cdot(Q_T/X) \\ &= (\text{石油依存率})\times(\text{全エネルギー消費原単位}) \\ &= R_P \qquad \times H_T\end{aligned} \quad \text{——⑧}$$

ただし，Q：エネルギー消費量
X：生　産　額
H：エネルギー消費原単位
R：エネルギー種別依存率
添字 P：石油製品
T：全エネルギー

故に

$$\begin{aligned}\triangle H_P &= H^t{}_P - H^0{}_P \\ &= (R^0{}_P + \triangle R_P)(H^0{}_T + \triangle H_T) - R^0{}_PH^0{}_T \\ &= \triangle R_PH^0{}_T + R^0{}_P\triangle H_T + \triangle R_P\triangle H_T\end{aligned} \quad \text{——⑨}$$

（石油消費原単位変化）＝（石油依存率変化）＋（全エネルギー消費原単位変化）＋（交絡項）

石油依存率変化 ‖ （石油代替効果）

全エネルギー消費原単位変化 ‖ （省エネルギー効果）

よって⑨式を⑦式に代入することにより，より詳細に分析の読みとりができるようになる。

第4節　その他の産業連関分析の事例

我が国における産業連関分析の事例を大別すると，①経済の構造分析と狭義の産業連関分析に分けられ，後者は更に，②経済の予測・計画のフレーム作成，③特定施策の経済効果測定の2つに分けることができる。

①は主として産業連関表の作成者によって行われており，従来作成されたほとんどすべての産業連関表について実施されている。これらの分析では，生産者価格取引表を中心として，我が国経済構造を産業別国内生産の状況，中間投入と付

加価値の状況，商品別の中間需要と最終需要の状況，輸出と輸入，家計消費，政府消費，資本形成の状況等から読み取るほか，逆行列係数を利用して当該年次における最終需要と生産との関係，最終需要と付加価値との関係及び最終需要と輸入との関係等が機能的に明らかにされている。また異なる２時点以上の表を利用して，時点間における構造変化の態様及び原因を明らかにすることもできる。

②は将来における最終需要を予測してその最終需要水準に見合う生産水準を求めようとするもので，その代表的事例としては，関西経済連合会による昭和37年日本経済の予測，仙台通産局による東北地方の産業別経済構造の予測及び経済企画庁による経済計画等への利用がある。この種の利用では，単に特定年次の産業連関表のみではなく，予測年次に至る間の投入係数及び輸入係数等の変化に関する情報や最終需要予測のための計量経済モデルの導入等が必要となる。

③は特定の経済施策が各産業にどのような波及効果をもたらすかを測定しようとするもので，財政支出の波及効果の測定，特定公共事業の経済効果の測定，企業誘致効果の測定等の物理分析と運賃その他特定部門の価格引上げの影響の測定等の価格分析とに分かれる。前者はそれぞれの経済活動に伴う支出を最終需要として外生的に与えることによって各産業への生産波及効果を測定しようとするものであり，各種の代替的政策手段のもつ経済効果の量的解明に役立っており，後者は特定部門の価格変動（例えば公共料金値上げ）に伴う各産業の投入係数の変化が究極的に各産業の価格にどのような影響を与えるかを測定しようとするものであって，いずれも②の総合的な経済予測の場合に比べて適用が比較的簡単であり，かつアップ・トウ・デートな問題に対して明快な回答を与えてくれるという点で広く政府や民間の諸機関で利用されている。

我が国で産業連関表を個別産業の問題に利用した最初の例は，日本鉄鋼連盟による鉄鋼の必要生産額の予測であった。この予測は昭和32年に行われ，昭和37年を予測年次とするものであった。また，関西経済連合会では，昭和35年に，昭和37年日本経済の産業別生産額の見通しを，産業連関分析の手法により行ったが，これは産業間の整合性のある包括的予測の初の適用例であった。同じ年に，関西経済連合会では近畿経済の将来を予測している。東北経済開発センターと機械工業連合会では昭和38年に，昭和45年予想産業連関表を作成し，東北地域の総合開発と機械工業の役割に関する包括的な評価を試みた。

鋼材倶楽部では，鉄鋼需要の次年度予測に対して，産業連関分析の手法の適用を試みた。通省産業省産業構造研究会では昭和40年に，産業連関表を用いて昭和42年における我が国経済の産業別予測を試み，産業構造高度化に関する包括的な解明を行っている。

機械振興協会経済研究所で毎年試みられる機械工業の需要予測は，計量経済モデルと連動して，各産業別の総需要，雇用，輸出入に関する包括的予測を行っている。

農林水産省では，特に農業部門を詳細に分類した「農業を中心とした産業連関表」を作成し，この表によって，昭和55年までに至る農業の年次別推移を他産業，特に食料品産業との相互一貫性を包括的に予測している。

阪神都市協議会では昭和37年に，昭和42年阪神都市圏の産業構造，雇用構造，労働生産性並びに所得構造について，産業連関表を分析の主軸としつつ，産業間に整合性のある予測値を得るための包括的なシミュレーション分析を行っており，また，札幌通商産業局，仙台通商産業局，四国通商産業局などでは，それぞれの地方の民間研究団体と協力して，それぞれの地域の産業構造についての予測を試みている。

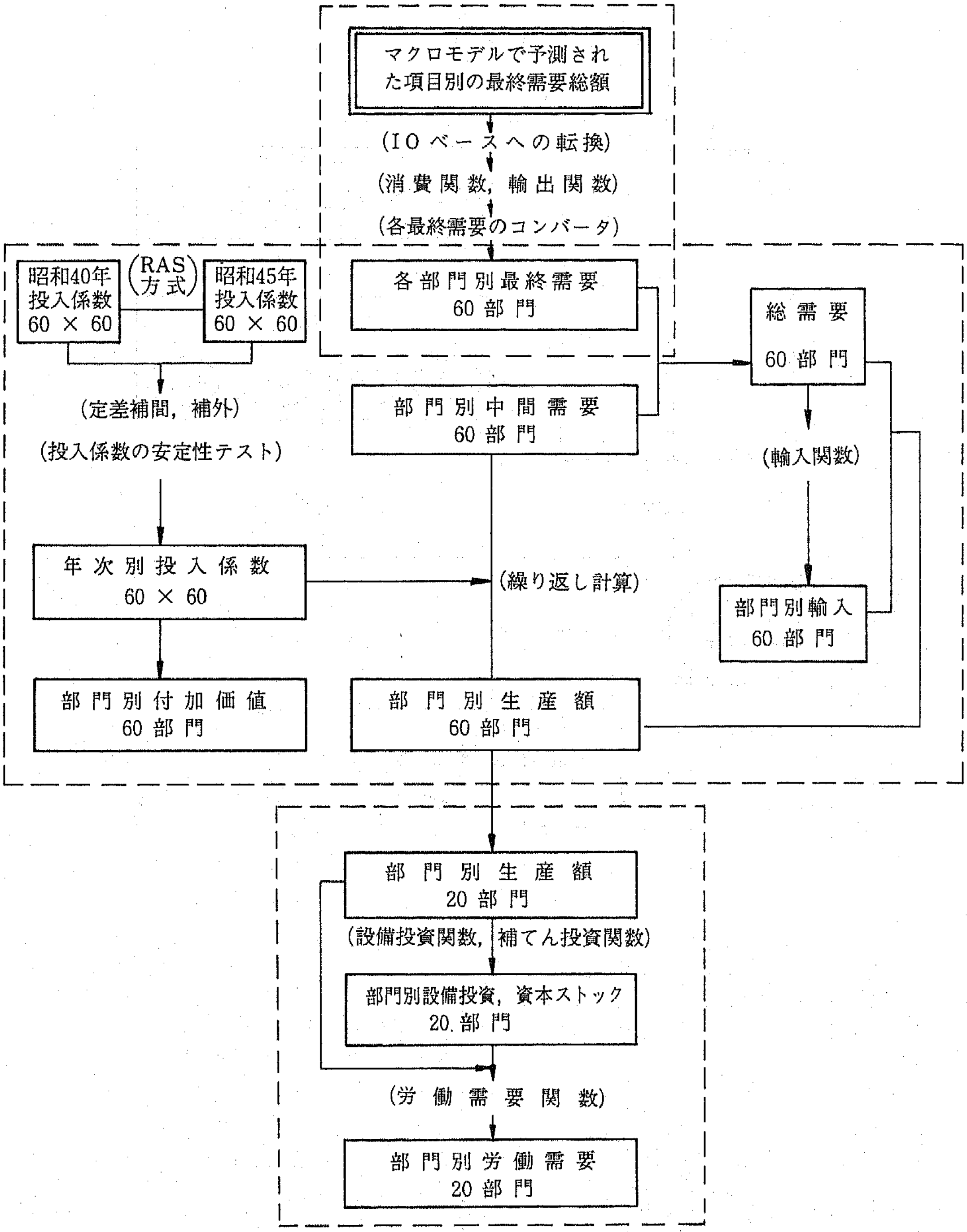
産業連関の手法による分析結果が，我が国の経済計画の実際的策定に対して本格的に利用されたのは，経済審議会による中期経済計画以降の経済計画についてであった。

そこでは，投入係数については各種手法によって将来値の予測が行われ，また，最終需要の予測に関してはエコノミック・モデルの手法が適用され，両者の組合せによって計画数値が算出されている。（第８－12図）

そのほか，各都道府県，大都市の多くでは，各地域の産業構造の予測や，それぞれの公共団体のマスター・プランのチェックや，そのフレームの作成に，この分析手法を適用している。

次に，経済政策の効果測定に関しても，数多くの適用例を持っている。経済企画庁では昭和33年に，産業連関表により，財政投資のもたらす生産面，雇用面への経済効果に関する分析を試み，その後も通商産業省，建設省，労働省，国鉄などで，同様の分析が行われている。また運輸省，国鉄，経済企画庁では，運賃値上げ政策の諸物価に与える影響について，産業連関の価格モデルの適用が試みられているが，その後，昭和58年に経済企画庁で，原油価格引下げの諸物価に与える影響について，同様の試算が行われている。一方，四国・本土連絡架橋のもつ経済効果分析が，それに関係する多くの団体で，産業連関表によって行われ，また，通商産業省，日本リサーチ・センター，大阪市などでは，昭和45年に開催された万国博覧会のもつ経済効果の分析に，この分析手法を適用している。愛媛県では，四国本土架橋が県内の幾つかのゾーンにおける各産業へ及ぼす波及効果を予測している。日本工業立地センターでは，最近の大規模総合開発プロジェクトの一環としての周防灘大規模開発に基づいて，大分県，福岡県

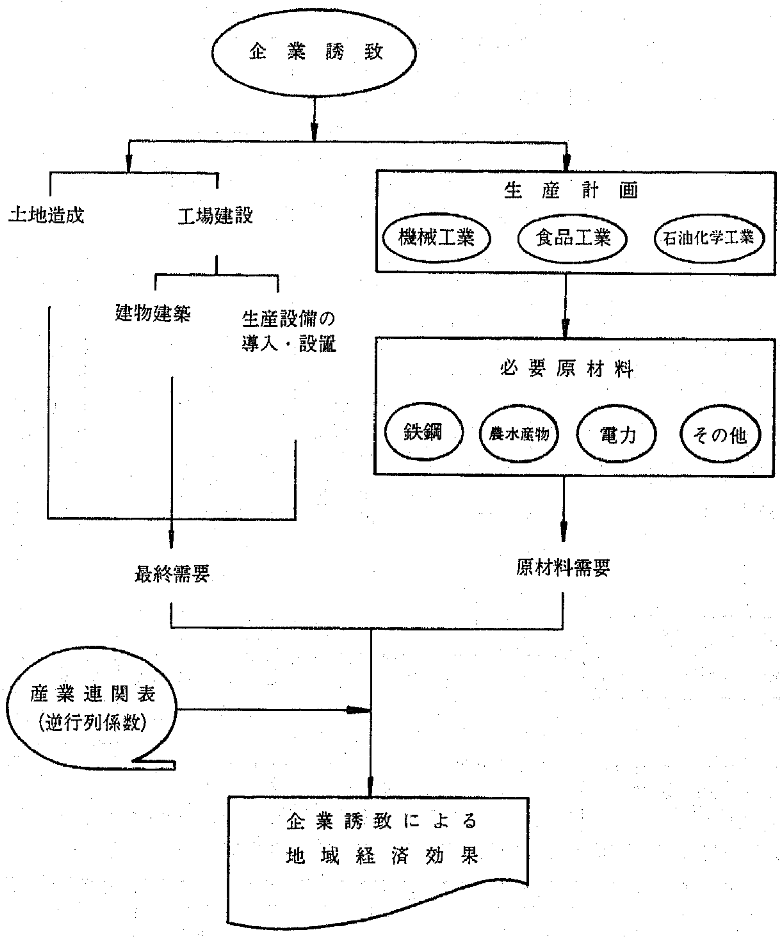
〈第８－12図　経済社会基本計画策定のフローチャート〉



の周防灘埋立地区に，鉄鋼，石油精製，石油化学，アルミニウムの大規模工業コンビナート基地が実現した場合に，誘致されたこれらの企業の年間の生産活動に伴って，これらの産業と関連した諸産業の活動水準の受ける影響に関して，産業連関モデルによる計測を行っているが，この種の企業誘致の経済効果の分析は，このほか，北海道通産局，仙台通産局，長崎県などで試みられている。(第８－13図参照)

通産省は，公害分析用産業連関表の作成と，その表による政策的命題への計量的接近を試みている。そこでは，代表的な公害因子である「硫黄酸化物」を，関東臨海地域について取り上げ，昭和50年における公害因子発生量を予測している。また，環境庁は，今年の公害の状況に関する年次報告で，我が国経済の投入・産出構造と汚染発生量に関する分析を行っている。

〈第8－13図　企業誘致分析フローチャート〉



〔参　考〕

〈参考1〉 部門統合の問題

1. はじめに

我が国の昭和55年産業連関表は，行541，列406部門の基本分類による取引基本表を始めとして，それを統合した164部門表，72部門表，28部門表及び13部門表が作成されている。また，これ以外にも，利用者がその目的に即したサイズの統合分類表を作成することもできるようになっている。

産業連関表をそのまま読み取るだけである限りにおいては，部門の統合の方法は自由であり，それは表章の精粗の問題に過ぎない。しかし，産業連関表の最も重要な利用方法は，これから導かれる投入係数や逆行列係数，最終需要項目別生産誘発係数などを用いて，経済の予測や特定の経済政策の効果測定，さらには価格分析を行おうとするものであり，産業連関表をこのような目的で利用しようとする場合には，産業連関表の部門がどのように設定されているかによって，極めて大きな影響が発生することとなる。

これは，産業連関表を用いて生産誘発効果等を計算する場合には，部門の設定の仕方によって，結果が異なったものとなることがあるからである。

このような事実に関しては，産業連関表の創始者であるW.レオンチェフが，その著書の中で，既に次のように言及しているところである。

『投入・産出分析のための産業の分類は，技術的同質性を考慮することによって導かれ……………。統合の問題は，投入・産出行列の列とそれに対応する行の幾つかを統合することによって，行列の大きさを小さくするときに発生する。統合された行列の性質と統合されない行列の性質との関係は，統合されている部門の投入列が，統合されない行列内のどんな位置にあるかに依存している。ある理想的な条件のもとでは，もとの行列の逆行列を統合したものは，統合した行列の逆行列と一致する。これらの条件が完全にではなく，近似的に満たされるときは，いま述べた一致性はもちろんただ近似的に実現されるに過ぎない。』(「産業連関分析」新飯田宏訳119ページ)

この問題に関して，統合の前後の波及効果の一致という観点を中心にして，以下にその概略を述べることとする。

2. 部門統合の理論的側面

(1) 2部門を統合する場合

投入係数の行列Aを次のようなものとして，考察を行うこととする。

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 部門\ell & 部門1 & 部門2 & 部門r \\ \hline 部門\ell & P & u_1 & u_2 & R \\ 部門1 & \ell'_1 & a_{11} & a_{12} & r'_1 \\ 部門2 & \ell'_2 & a_{21} & a_{22} & r'_2 \\ 部門r & Q & d_1 & d_2 & S \end{array}$$

ここで，部門1及び部門2の国内生産額をそれぞれX_1及びX_2とし，この2部門を統合した場合の影響を調べてみることとする。

$$\alpha \equiv \frac{X_1}{X_1+X_2},\ \beta \equiv \frac{X_2}{X_1+X_2}$$

とすれば，部門1及び部門2を統合した場合の投入係数の行列$\overset{+}{A}$は，次のように表すことができる。

$$\overset{+}{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline P & \alpha u_1 + \beta u_2 & R \\ \hline \ell'_1+\ell'_2 & \alpha(a_{11}+a_{21}) + \beta(a_{12}+a_{22}) & r'_1+r'_2 \\ \hline Q & \alpha d_1 + \beta d_2 & S \\ \hline \end{array}$$

ここで，最終需要を次のように表す。

$$F = \begin{pmatrix} F_\ell \\ F_1 \\ F_2 \\ F_r \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} F_\ell：部門\ell に対する最終需要 \\ F_1：部門1 \qquad〃 \\ F_2：部門2 \qquad〃 \\ F_r：部門r \qquad〃 \end{array}$$

$(I-A)^{-1}$型のモデルで，任意の最終需要Fに対してAと$\overset{+}{A}$とで生産誘発効果が一致する場合の条件を考えてみよう。

まず，部門統合を行う前の投入係数の行列Aを用いて，最終需要Fに対する1次波及を計算する。

1次波及によって必要となる各部門の国内生産額をF^1とすれば，

$$F^1 = \begin{pmatrix} F^1_\ell \\ F^1_1 \\ F^1_2 \\ F^1_r \end{pmatrix} = AF = \begin{pmatrix} PF_\ell + u_1F_1 + u_2F_2 + RF_r \\ \ell'_1F_\ell + a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + r'_1F_r \\ \ell'_2F_\ell + a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + r'_2F_r \\ QF_\ell + d_1F_1 + d_2F_2 + SF_r \end{pmatrix} \quad \cdots①$$

となる。

次に，部門統合を行った投入係数の行列$\overset{+}{A}$を用いて，最終需要$\overset{+}{F}$に対する１次波及を計算する。

ここで，

$$\overset{+}{F}=\begin{bmatrix} F_{\ell} \\ F_1+F_2 \\ F_r \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である。

１次波及で必要となる各部門の国内生産額を$\overset{+}{F}{}^1$とすれば，

$$\overset{+}{F}{}^1=\begin{bmatrix} \overset{+}{F}{}^1_{\ell} \\ \overset{+}{F}{}^1_{1+2} \\ \overset{+}{F}{}^1_r \end{bmatrix}=\overset{+}{A}\overset{+}{F}=\begin{bmatrix} PF_{\ell}+(\alpha \mathbf{u}_1+\beta \mathbf{u}_2)(F_1+F_2)+RF_r \\ (\ell'_1+\ell'_2)F_{\ell}+\{\alpha(a_{11}+a_{21})+\beta(a_{12}+a_{22})\}(F_1+F_2)+(\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_2')F_r \\ QF_{\ell}+(\alpha \mathbf{d}_1+\beta \mathbf{d}_2)(F_1+F_2)+SF_r \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる。

ここで，F^1及び$\overset{+}{F}{}^1$に対応するそれぞれの波及生産額が，相互に一致する条件は，任意のＦについて

$F^1_{\ell}=\overset{+}{F}{}^1_{\ell}$

$F^1_1+F^1_2=\overset{+}{F}_{1+2}$

$F^1_r=\overset{+}{F}{}^1_r$

が成立することである。③に①及び②を代入して，F^1に関する恒等式になる条件を求めると，

$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$

$a_{11}+a_{21}=a_{12}+a_{22}$

$\mathbf{d}_1=\mathbf{d}_2$

となる。

この条件が成立するとき，F^1に対する波及生産額（２次波及による国内生産額）も一致することとなる。同様にして，すべての波及生産額が一致する。

即ち，各部門における生産誘発額が，統合前と統合後とで変化しないための条件は，統合対象となった各部門の投入係数が，統合後の対応する部門の投入係数と一致していることである。換言すれば，生産技術構造を示す投入係数が相互に一致している二つの部門を統合した場合，統合前と統合後とでは生産誘発効果に変化は生じないということである。

我が国における産業連関表の部門は，財貨・サービスの種類に応じて設定されることとされているが，これは言わば事業所における生産活動単位，即ちアクティビティ・ベースの分類に対応するものとなっているが，上に述べた条件はこのアクティビティ・ベースの同一性を示したものであり，その意味では部門設定の基準や原理を表したものともみることができる。

(2)　部門統合に伴うその他の特定部門に対する生産誘発効果

次に，部門統合に伴うその他の特定部門に対する生産誘発効果への影響について考えてみることにする。その特定の部門を部門ℓで代表させて考えることとする。

１次の波及効果が，部門統合を行う前と後とで一致する条件は，前記の③式のうち，

$F^1_{\ell}=\overset{+}{F}{}^1_{\ell}$

となる。これから得られる条件は，

$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$

である。即ち，部門統合の対象となる部門１及び２の部門ℓからの投入係数が相互に一致している場合には，部門統合の前と後とで部門ℓに対する１次の生産波及効果は，任意の最終需要に関して一致することとなる。ただし，２次以降の波及効果については，一般に統合の前と後とでは一致しない。

ここで，特に

$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2=0$

かつ，

$R=0$

が成立する場合，即ち，考察の対象となっている部門ℓ以外の部門が，部門ℓから全く投入を行っていない場合には，部門ℓ以外の部門をどのように統合しても，部門ℓに対する生産波及効果には影響が生じない。

このような関係を全体的に把握するためには，投入係数表のブロック化が有効である。今，投入係数表の行部門及び列部門について，それぞれの対応関係を保ちつつその順番を入れ替えて，次のように変形したとする。

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
Ⅰ	× × ×			
Ⅱ		× ×× ××× ××××		
Ⅲ			×× ××	
Ⅳ	××× ××× ×××	×××× ×××× ××××	×× ×× ××	××× ××× ×××

(注)
×以外は，すべて０である。

このとき，ある最終需要による波及効果を，例えばグループⅠにのみ注目して分析する場合には，グループⅡ，Ⅲ，Ⅳをどのように統合しても，Ⅰにおける誘発効果は一定である。Ⅱ又はⅢのグループに関しても同様である。

また，部門統合の対象となる各部門の最終需要の相互の比率が，それぞれの国内生産額の比率と等しい場合，即ち，

$F_1 : F_2 = \alpha : \beta \ (\alpha + \beta = 1)$

の場合には,

$$F^1 = \begin{bmatrix} PF_\ell + \left(\mathbf{u}_1 + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{u}_2\right)F_1 + P\,F_r \\ \boldsymbol{\ell}_1' F_\ell + \left(a_{11} + \frac{\beta}{\alpha} a_{12}\right)F_1 + \mathbf{r}_1' F_r \\ \boldsymbol{\ell}_2' F_\ell + \left(a_{21} + \frac{\beta}{\alpha} a_{22}\right)F_1 + \mathbf{r}_2' F_r \\ QF_\ell + \left(\mathbf{d}_1 + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{d}_2\right)F_1 + S\,F_r \end{bmatrix}$$

$$\overset{+}{F}{}^1 = \begin{bmatrix} PF_\ell + (\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)F_1 & + & RF_r \\ (\boldsymbol{\ell}_1' + \boldsymbol{\ell}_2')F_\ell + \{\alpha(a_{11}+a_{21}) + \beta(a_{12}+a_{22})\}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)F_1 & + & (\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2')F_r \\ QF_\ell + (\alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)F_1 & + & SF_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} PF_\ell + \left(\mathbf{u}_1 + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{u}_2\right)F_1 & + & RF_r \\ (\boldsymbol{\ell}_1' + \boldsymbol{\ell}_2')F_\ell + \left\{a_{11} + a_{21} + \frac{\beta}{\alpha}(a_{12}+a_{22})\right\}F_1 & + & (\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2')F_r \\ QF_\ell + \left(\mathbf{d}_1 + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{d}_2\right)F_1 & + & SF_r \end{bmatrix}$$

となって，両者は一致する。

3. まとめ

2.で得られた結論をまとめると，以下のようなものとなる。

(1) 部門統合の対象となる各部門の投入係数が，統合後の部門の投入係数と一致している場合には，任意の最終需要に関して，その生産波及効果は完全に一致する。

(2) 部門統合の対象となる部門のその他の特定の部門からの投入係数が，部門統合の前と後とで一致している場合には，その特定部門に対する1次の生産波及効果は，任意の最終需要に関して変化しない。

(3) ある特定の部門から全く投入を受けていない部門については，どのように統合しても，その特定の部門に対する生産波及効果には影響が生じない。

(4) 部門統合の対象となる各部門の最終需要の相互の比率が，それぞれの国内生産額の比率と等しい場合には，その最終需要がもたらす1次の生産波及効果はすべての対応する部門において一致する。

なお，輸入を考慮した $[I-(I-\hat{M})]^{-1}$ 型のモデルで考える場合には，(3)を除き，部門統合の対象となる部門の輸入率が等しいという条件が加わる。

以上のように，部門統合により発生する生産波及効果の歪みは，投入構造が統合の前後で変化しないという非常に特殊な場合を除いて，避けられないこととなっている。

このため，電子計算機等の計算手段の発達した今日では，できる限り基本分類の部門で分析を行うことが望ましいということになる。ただし，上記のような条件が近似的に成立するような範囲内での部門統合であれば，波及効果の歪みはそれ程大きなものではなく，特に特定の部門についてのみ注目して分析を行う場合には，ブロック化により，有効な部門統合が行い得るものと考えられる。

〈参考２〉「行列」の意味と計算

1. ベクトル

(1) 定　義

○幾つかの数を縦又は横に並べたものをベクトルと呼ぶ。（これに対し，通常の数をスカラーと呼ぶ。）

○数を縦に並べたものを列ベクトル，横に並べたものを行ベクトルと呼ぶ。

○数をｎ個並べたベクトルをｎ次元ベクトルと呼ぶ。

○列ベクトルについては上から順に，行ベクトルについては左から順に第１成分，第２成分，……と呼ぶ。

３次元列ベクトル：
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{第１成分} \\ \longleftarrow \text{第２成分} \\ \longleftarrow \text{第３成分} \end{array}$$

５次元行ベクトル：
$$\begin{array}{ccccc} (3, & 2, & 0, & -9, & 5) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{第１成分} & \text{第２成分} & \text{第３成分} & \text{第４成分} & \text{第５成分} \end{array}$$

(2) 演　算

ア．転　置

○行ベクトルを列ベクトルに，列ベクトルを行ベクトルに変換する。

○転置は記号′をつけて表す。

$\mathbf{a} = (1,\ 2,\ 3)$：行ベクトル

$$\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
：列ベクトル

イ．加減算

○同じ次元のベクトル同士は足し算・引き算ができる。

○ベクトルの足し算・引き算は，対応する成分同士を足し算・引き算する。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 4+(-2) \\ -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 7-3 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+2 \\ 6+3 \\ 2+? \end{pmatrix}$$
………次元の異なるベクトル同士は足せない

ウ．スカラー倍

○スカラーとベクトルとの掛け算は，スカラーをベクトルのすべての成分に掛ける。

$$3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 \\ 3 \times 4 \\ 3 \times (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix}$$

エ．内　積

○次元の等しい二つのベクトルの間に内積と呼ばれる演算が定義される。

○$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ との内積を $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ で表す。

○$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ との対応する成分を掛けたものをすべて足し合わせたものである。

○内積はベクトルではなくスカラーになる。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccl} 1 & \times & 2 & = & 2 \\ 2 & \times & (-3) & = & -6 \\ 5 & \times & 4 & = & 20 \quad (+ \\ \hline & & & & 16 \end{array}$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 16$

○ベクトルの内積について $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ が成立する。

$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 16 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

(3) ベクトルの応用

○ある寿し屋では，上・中・並の３種類の寿しの値段がそれぞれ1500円・1200円・1000円に定められている。これを

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

と表すことにする。

いま，Ａ家からは上：２人前，中：３人前，並：２人前の注文を受け，Ｂ家からは上：３人前，中：１人前の注文を受けた。

これらをそれぞれ

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表すことにする。

○Ａ，Ｂ両家の注文数の合計

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

○A家の注文額

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1500\\1200\\1000\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$=1500\times2+1200\times3+1000\times2$$

$$=8600$$

○B家の注文額

$\mathbf{P}\cdot\mathbf{b}=5700$

○A，B両家の注文額の合計

$\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}=8600+5700=14300$

$$\mathbf{p}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\begin{pmatrix}1500\\1200\\1000\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$=1500\times5+1200\times4+1000\times2$$

$$=14300$$

○ここで明らかなようにベクトルの内積に関して分配則

$\mathbf{p}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}$ が成立する。

2. 行　列

(1) 定　義

○縦にm，横にnの長方形の形に数を並べたものを行列（m×n行列，(m，n)型行列，m行n列の行列）と呼ぶ。

○長方形に並んだ数の横の並びを行，縦の並びを列と呼び，上（左）から順に第1行（第1列），第2行(第2列)，……と呼ぶ。

○行列Aの第i行，第j列にある数字をAの（i，j）成分と呼び a_{ij} で表す。

$$\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\cdots\cdots\text{第1行}\\\cdots\cdots\text{第2行}\\\cdots\cdots\text{第3行}\end{array}\\\begin{array}{ccc}\text{第1列}&\text{第2列}&\text{第3列}\end{array}&\end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\cdots\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

○m次元列ベクトルは（m，1）型，n次元行ベクトルは（1，n）型の行列と見ることができる。

○行の数と列の数が等しい行列，即ち（n，n）型行列をn次正方行列と呼ぶ。

(2) 演　算

ア．転　置

○行列Aの（i，j）成分 a_{ij} を（j，i）成分とするような行列をAの転置行列と呼びA′で表す。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&-2\end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\\3&-2\end{pmatrix}$$

イ．加 減 算

○二つの行列A，Bが同じ型のときAとBの間で足し算，引き算ができる。それぞれの結果をA＋B，A－Bのように表す。

A＋Bの（i，j）成分は $a_{ij}+b_{ij}$

A－Bの（i，j）成分は $a_{ij}-b_{ij}$

である。

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2\\9&3\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0&2+2\\3+9&4+3\\5+(-1)&0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\12&7\\4&3\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1-0&2-2\\3-9&4-3\\5-(-1)&0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\\6&-3\end{pmatrix}$$

ウ．スカラー倍

○行列のスカラー倍は行列のすべての成分にスカラーを掛けて得られた行列となる。

$$2\times\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2&3\times2\\0\times2&2\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6\\0&4\end{pmatrix}$$

エ．乗　算

○Aが（m，k）型，Bが（k，n）型の行列のとき，AとBを掛け算することができ，その積ABは（m，n）型行列になる。その計算は以下のように行う。

○ABの（i，j）成分 c_{ij} を次のように求める。

① Aの第i行を取り出した行ベクトルを a_i とする。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots\cdots&a_{1k}\\\vdots&&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots\cdots&a_{ik}\\\vdots&&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots\cdots&a_{mk}\end{pmatrix}\Leftarrow\text{第 i 行}$$

$a_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots\cdots,\ a_{ik})$

② Bの第j列を取り出した列ベクトルを b_j とする。

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \Uparrow \\ \text{第}\,j\,\text{列} \end{array}$$

$$\mathbf{b}_j=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$$

③ C_{ij}は$a_i{}'$と$\mathbf{b}_j$の内積$\mathbf{a}'_i\cdot\mathbf{b}_j$である。

$$C_{ij}=\mathbf{a}_i{}'\cdot\mathbf{b}_j$$
$$=\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{ik} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$$
$$=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\cdots\cdots+a_{ik}\cdot b_{kj}$$
$$=\sum_{\ell=1}^{k}a_{i\ell}b_{\ell j}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して$C=AB$を求める。

$$C_{11}=1\times5+2\times(-2)=1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{12}=1\times(-1)+2\times3=5 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{21}=4\times5+3\times(-2)=14 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{22}=4\times(-1)+3\times3=5 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) 正方行列の乗算

○n次正方行列同士は互いに乗算できて，結果もn次正方行列になる。

ア．交　換

$AB=BA$は必ずしも成立しない。

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}\quad BA=\begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

イ．単位行列と零行列

$$○I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，

$$AI=IA=A$$

$$○O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

について，

$$AO=OA=O$$

○I，Oは通常の掛け算における1，0と同じような性質を持つので，それぞれ単位行列，零行列と呼ばれる。

ウ．ベキ乗

○普通の数と同様にして

$$AA=A^2$$
$$AAA=A^3$$

のように表現する。また，$A^0=I$である。

(4) 正方行列と列ベクトルの乗算

○Aをn次正方行列，xをn次元ベクトルとすると，Aとxの積Axは，xと同様にn次元ベクトルになる。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax=\begin{pmatrix} 1\times1+7\times2+5\times(-1) \\ 0\times1+(-1)\times2+2\times(-1) \\ 3\times1+9\times2+4\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}$$

○$B(Ax)=(BA)x$である。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B(Ax)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(BA)x=\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

○$Ix = x$である。

(5) 連立一次方程式と逆行列

○x_1, x_2についての連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots☆$$

を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とすると，☆は

$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$のように表される。

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

○このようにしてn変数の連立一次方程式は，n次正方行列Aと，n次元ベクトル$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$とを用いて，$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$のように表現することができる。

○いま$A^{-1}A = I$となるような行列A^{-1}がみつかったとすると，$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$の両辺に左からA^{-1}を掛けて

$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{y}$

$(A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$

$I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$

$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$

となる。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$ については

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$ である。

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

従って $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

○$A^{-1}A = I$となるような行列A^{-1}をAの逆行列と呼ぶ。

○$\mathbf{x}$についての連立一次方程式$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$を解く場合，もしAの逆行列A^{-1}が分かっていれば，

$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$

の計算により$\mathbf{x}$を求めることができるので，容易に解けることになる。

例えば

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 \quad\quad = 4 \end{cases}$$

については,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

のように表すことができる。

もし，ここで

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

が分かっていれば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

のようにx_1, x_2, x_3の値は容易に求めることが可能となる。