第3部 統計的探究の実践 Ⅱ
～不確実な事象を理解する～

1　途中で中断したゲームの勝敗の帰趨は？［確率の概念］

可能性の大きさを測る確率の考え方に関する試行錯誤の例を紹介する。本節の素材は、パスカル（Blaise Pascal）とフェルマー（Pierre de Fermat）という2人の偉大な数学者によって、最初に不確実性が扱われた歴史的な問題である。

◇ 歴史的な問題

2人の人物A、Bがあるゲームをして、先に3勝した者が賞金を貰えるものとする。Aが2勝1敗の状態でゲームを中断したとき、賞金をどのように分配したら公平だろうか。問題を明確にするために、コイン投げ（表ならAの勝ち）のように規則を決めることにする。Aが2勝1敗の状態から、どちらかが勝つまでゲームを続けたらどうなるかを考えれば良いだろう。

パスカルが考えた方法は次のとおりである。4回目のコイン投げで、Aが勝てば賞金の全額を受け取るが、Bが勝てば2勝2敗と五分になり分配金を半分ずつとするのが公平である。したがって、ゲームを中断したときのAの権利は $(1+1/2)/2=3/4$ となる。

フェルマーは、次のように考えた。ゲームは最大であと2回で終了するから、すべての場合を列挙して、結果（*aa*、*ab*、*ba*、*bb*）はすべて1/4の可能性を持つと考える。ただし、*a*、*b* はそれぞれ、A、Bの勝ちを表す。このうち、Aは最初の3つの場合に勝ち、最後の場合は、Bが勝つから、Aへの公平な分配金額は、3/4といえる。

フェルマーの方法では、4つの場合があるとしているが、次にAが勝ったらゲームは1回で終了するから、*aa* と *ab* はあり得ない。そうすると、起きうる場合は *a*, *ba*, *bb* の3通りしかないが、それらは同程度に確からしくないようにみえる。これは、この議論が行われた当時に、実際に提示された疑問とされる。確からしさについて、どのように考えたら良いのだろうか。

パスカルとフェルマーは次の問題も考えた。先に4勝した者が勝ちというゲームで、Aが3勝1敗のときに中断したときのAの権利は、どのように求めたら良いだろうか。パスカルの方法を使えば、次のようになる。4回目のコイン投げでAが勝てば全額（分配金は1）を受け取るが、負けた場合は3勝すれば勝ちのゲームで2勝1敗のときと同じ状態となり、このときの分配金はさきほど計算した3/4となる。Aが勝つ可能性とBが勝つ可能性は等しいから、Aの権利は $(1+3/4)/2=7/8$ となる。

Q1：この問題をフェルマーの方法で解いてみよう。

Ｑ２：先に４勝した者が勝ちというゲームで、Ａが３勝２敗のときに中断すると、Ａの分配金はいくらとなるか、パスカルの方法とフェルマーの方法で、それぞれ計算してみよう。

◇ 確率の求め方

賞金を１とすると、勝つ可能性、すなわち、**確率**を合理的な分配金額とみなすことができるから、確率を求める問題として考えよう。

公正なサイコロやゆがみのないコインなど、すべての結果（n 通り）が同等に確からしい場合であれば、ある結果（r 通り）が起きる確率を r/n と定義することはもっともらしい。

これは確率の先験的な定義と呼ばれるもので、実際、多くの教科書ではこれを確率の定義と記しているが、この定義が適用できない問題があるだろうか。
（後に、相対度数による定義と比較して検討する）

ところで、Ａが２勝１敗の状態でゲームを中断した例では、ゲームが終わるまで続けたときの結果は、a、ba、bb の３通りであって、それらは同等に確からしいとはいえない。このような場合は、同等に確からしい結果を並べる必要があり、フェルマーが示したように aa、ab、ba、bb の４通りとすると、確率の先験的な定義が使えて、このうちＡが勝つのは aa、ab、ba の３通りで、その確率は3/4と求められる。しかし、この方法では、実際に実現しない結果 aa、ab を含めているため、不自然という指摘も納得できる。そこで、もう少し納得できる方法を考えるために、準備として、確率に関する基本的な事項を確認しよう。

確率の考え方

簡単のために、毎回のコイン投げで表が出る確率が1/2であり、また、各回の結果は他の回の結果に影響しないという状況に限定しよう。表、裏をそれぞれ、H、T（英語の表裏は Head と Tail である）として、P(　)という記号で確率を表すと、P(H)＝P(T)＝1/2である。各回のコイン投げ結果はお互いに無関係だから、「１回目が表、かつ２回目が裏」（これを HT と表す）となる確率は掛け算で求めることができて、P(HT)＝P(H)P(T)＝(1/2)(1/2)＝1/4である。以下の確率も同様に求められる。

P(TH)＝P(T)P(H)＝1/4、P(HH)＝P(H)P(H)＝1/4、P(TT)＝P(T)P(T)＝1/4

このように掛け算で確率的に求められる場合、確率では独立と呼ぶが、詳しくは、後にあらためて考える。

決定木

途中でゲームが終わる場合も考えて、決定木（decision tree）という道具を使う。

図１　決定木の例

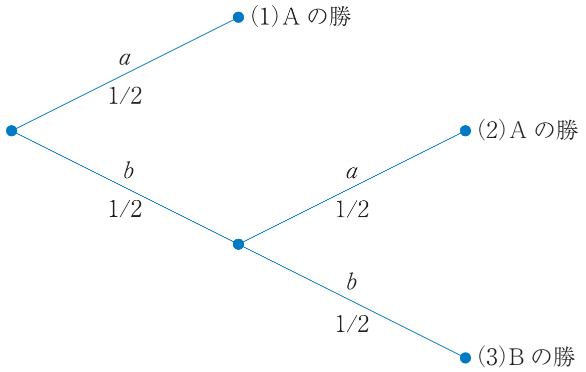


図１では、一番左の黒丸がゲームを中断した状態を表し、その後、ゲームを継続するときに起きうる結果を枝で表している。各節（黒丸）から分かれる枝に、a、b の結果とその確率が示されていて、右端の点でゲームが終了する。a が(1)、ba が(2)、bb が(3)という結果に対応する。(1)でゲームが終了する確率は $P(H) = 1/2$ である。同様に、(2)で終了する確率は $P(TH) = P(T)P(H) = 1/4$、(3)で終了する確率は $P(TT) = P(T)P(T) = 1/4$ である。A が勝つのは(1)と(2)の場合だから、確率はそれらの合計として、$1/2 + 1/4 = 3/4$ と求められる。このようにすれば、ゲームにおいて実際には起きない HH および HT という場合を考える必要はなくなる。

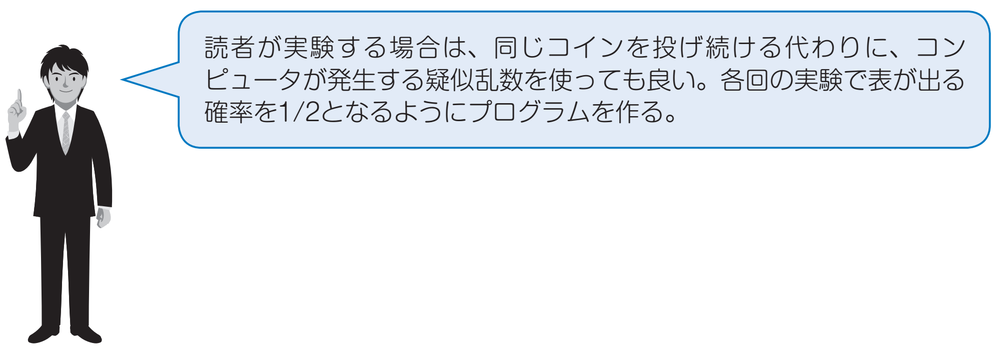
実験による検証

実際にコイン投げなどの実験を何回か行って、以上の方法の妥当性を確かめよう。A の２勝１敗という状態から、決着がつくまでゲームを継続して、最終的に A が勝った回数と B が勝った回数を比べてみる。

A の２勝１敗という状態から始めて、ゲームを100回行った結果を示す。

H	TT	H	H	H	TT	TH	H	TT	H	TH	H	H	H	TH	H	TT	TH	TH	TT	(A) 15
TH	TH	H	TT	H	H	H	TH	H	TH	H	H	H	TT	H	H	TT	TH	TT	TT	(A) 15
H	TT	TH	TH	TH	H	H	H	TT	TH	H	TT	H	H	H	TT	H	TT	TT	H	(A) 14
H	TH	TT	H	H	H	H	H	TH	TT	H	H	H	TH	H	TH	H	H	TT	TH	(A) 17
H	H	TH	H	TH	H	H	TH	H	H	TT	TT	H	H	H	TT	TT	TT	H	H	(A) 15

実験は20回ずつ区切って、各行ごとに A が勝った回数を記している。100回の実験のうち、A が勝った回数の合計は76回、比率にすると0.76となる。これはこれまでに求めた確率の値3/4＝0.75にかなり近い。



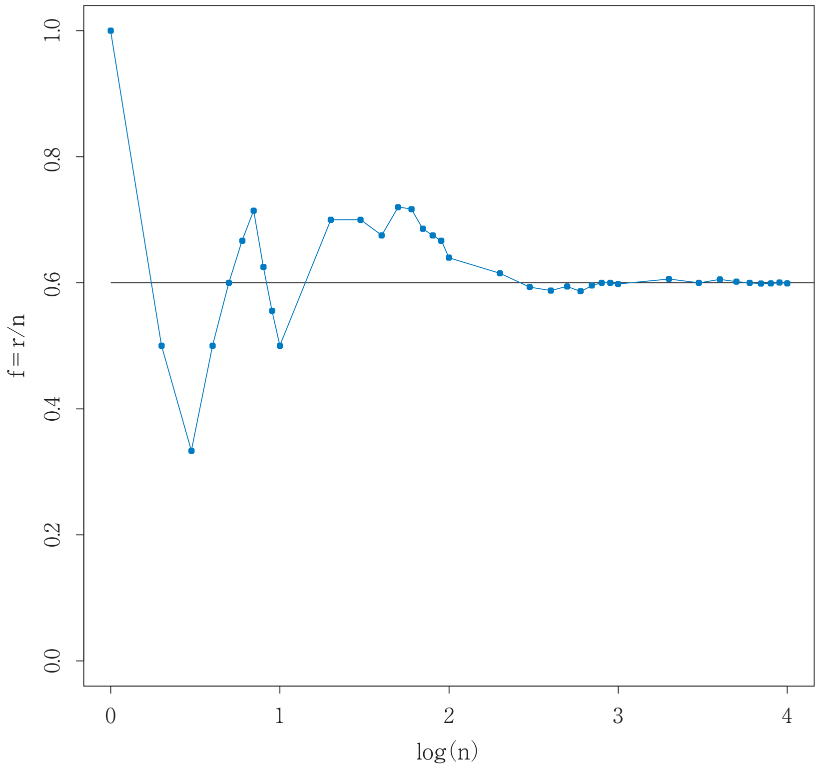
◇ 一般的な確率の考え方

最初の問題で確率を求めるためには、決定木を用いる解答が最も自然であろう。ここでは、もう少し進んだ問題を考える。実際には、サイコロやコインはゆがんでいることもあり、同等に確からしいという前提が満たされない場合にも確率を考える必要がある。20世紀まで標準的であった解釈では、相対度数によって確率を定義する。ゆがんでいるかもしれないコインを投げたときに表が出る確率を例にして、説明しよう。

コインを投げ続けて、n 回中表が r 回出たときに r を度数（または頻度、frequency）、$f=r/n$ を**相対度数**（relative frequency）と呼ぶ。私たちの経験では、実験を続けていると、最初のうちは相対度数 $f=r/n$ は変動しているが、実験の回数を増やしていくと相対度数は次第に安定して、ある値に近づくと考えられる。この値を表が出る確率と呼ぶことができる。

図２は、表が出る確率が0.6のコイン投げを、コンピュータで仮想的に実験した結果である。

図２　コイン投げの実験（横軸は実験回数 n の常用対数）



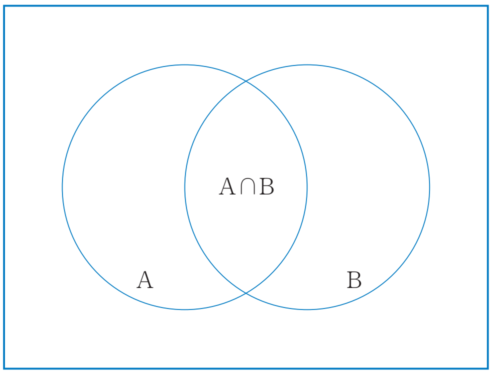
1, 2, …, 10, 20, …, 100, 200, …, 1000, 2000, …, 10000と回数を区切って、その回数までの相対度数を示している。横軸は常用対数で表示しているから、1, 2, 3, 4が、それぞれ10, 100, 1000, 10000に対応する。この例では、1000回を超えたあたりから0.6に近づいている。

一般の問題でも、ある事象 A に関する仮想的な実験において、A が起きる相対度数 r/n の極限を考えて、これを事象 A の確率 P(A)と呼ぶ。これが確率の相対度数による定義である。

確率論では確率を定義する対象を**事象**と呼び、記号 A，B，…，E，F，…などで表す。とくに、確実に起きる事象である**全事象** S の確率を１と定義する。A または B という事象（**和事象**）を A∪B，A かつ B という事象（**積事象**）を A∩B（AB または A・B という記法もある）と表す。A ではないという事象（**余事象**）を $\overline{\mathrm{A}}$ と表す。とくに、全事象 S の余事象 $\overline{\mathrm{S}}$ は**空事象**と呼ばれる「あり得ない事象」であり、これを記号 ϕ で表す。

図3は、英国の数学者ジョン・ベン（John Venn）による事象を表す図の例で、中央の部分が $A \cap B$ である。同じコインを2回投げる例で、AをHH、BをHT、CをTH、DをTT、Eを1回目がH（2回目は何でも良い）という事象とすると、$A \cup B = E$、$A \cap E = A$、$A \cap B = \phi$、$E \cup C \cup D = S$ となる。この例のA、Bのように、$A \cap B = \phi$ となる（同時に起きない）事象を排反と呼ぶ。

図3　ベン図の例



相対度数による定義を採用すれば、**排反な事象** A、Bに対して $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ が成り立つ。とくに、$\overline{A}$ とAは排反だから、$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ が成り立つ。事象の数が多くなっても $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が互いに排反 $A_i \cap A_j = \phi$ $(i, j, = 1, \cdots, n, i \neq j)$ のときは、次の式が成り立つ。

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

この性質は加法性と呼ばれ、どのような定義を用いても、確率が満たすべき基本的な性質である。なお、排反でない事象も含めるときは、$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ となることが**ベン図**から分かる。

伝統的な確率論では、事象Aが与えられたときの事象Bの**条件付確率**は、形式的に次の式で定義される。

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{ただし、} P(A) \neq 0$$

とくに、事象Aと事象Bについて、$P(B|A) = P(B)$ が成り立つとき、事象Aと事象Bは独立であるという。

Q3：$P(B|A) = P(B)$ が成り立つとき、逆方向の関係 $P(A|B) = P(A)$ も成り立つことを確かめよう。ただし、$P(B) \neq 0$ とする。

条件付確率の定義を書き換えた次の式は、**乗法法則**と呼ばれることがある。

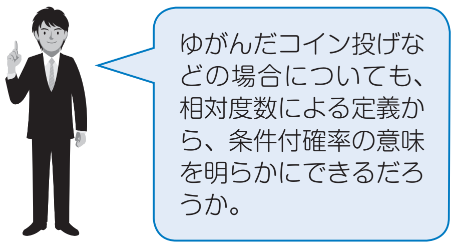
$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

乗法法則は、まず事象Aが起きたことを観測して、次に事象Bが起きる確率を求めるときに、自然な求め方となっている。ここで、事象Aと事象Bが独立であれば、$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ だから、$P(B) = P(B|A)$ となる。

初等的な問題では、2つの事象が発生する過程が物理的に無関係であれば、それらを独立と想定すれば良い。

練習のため、以下ではゆがんだコインを投げ続ける問題を考える。ただし、このコインで表が出る事象Hについては $P(H) = p$ $(0 < p < 1)$ であり、$p = 1/2$ とは限らない。毎回のコイン投げが物理的に無関係なら、独立と想定して良い。たとえば、順番に (H, H, T, H) と出る確率は、

$$P(HHTH) = P(H)P(H)P(T)P(H) = p \cdot p \cdot (1-p) \cdot p = p^3(1-p) \text{となる。}$$



Q4：このコインを投げ続けて、5回目に初めて表が出る確率はいくらか。

Q5：このコインを5回投げて、表が3回出る確率はいくらか。

◇ さらに理解を深めるために、練習問題を問いてみよう

Q６：青いカード b 枚、白いカード w 枚、合計 $n=b+w$ 枚を入れた箱から、よくかき混ぜてカードを抜きだす実験を考えよう。結果について、１枚目が青ならば B_1、２枚目が白ならば W_2 などと記すことにする。

(a)　元に戻さずに抜き出すとき、条件付き確率 $P(W_2|B_1)$ はいくらか。
(b)　元に戻さずに抜き出すとき、確率 $P(B_1\cap W_2)$ はいくらか。　ヒント：乗法公式
(c)　元に戻さずに抜き出すとき、確率 $P(B_1\cap W_2\cap W_3)$ はいくらか。　ヒント：乗法公式
(d)　元に戻さずに抜き出すとき、確率 $P(W_2)$ はいくらか。　ヒント：$P(W_2)=P(B_1\cap W_2)+P(W_1\cap W_2)$
(e)　毎回、元に戻しながら抜き出すとき、確率 $P(B_1\cap W_2\cap W_3)$ はいくらか。

Q７：箱の中に数字を書いた６枚のカードがあり、その数字は、３枚が「１」、２枚が「２」、１枚が「４」である。よくかき混ぜて、毎回元に戻しながらカードを抜き出す独立な実験を考える。以下の確率はいくらか。

(a)　３回の実験で、いずれも「１」が出る。
(b)　３回の実験で、「１」、「１」、「２」の順番に出る。
(c)　３回の実験で、「１」、「２」、「１」の順番に出る。
(d)　３回の実験で、「１」が２回、「２」が１回出る。
(e)　５回目に初めて「４」が出る。
(f)　「１または２」が出る前に「４」が出る確率はいくらか。

Q８：前問の箱で、元に戻さずにカードを取り出す（独立でない実験）場合、以下の確率はいくらか。

(a)　１枚目に「１」が出たという条件の下で、２枚目に「４」が出る。
(b)　３回の実験で、「１」、「１」、「２」の順番に出る。
(c)　３回の実験で、順番にかかわらず「１」が２枚、「２」が１枚出る。
(d)　１枚目の結果にかかわらず、２枚目に「２」が出る。
(e)　判断確率（主観確率）：１枚目を伏せた状態で２枚目に「２」が出たとき、１枚目を見たら「２」となる。

Q９：A、B、C がゲームを続けて、B が勝つ前に A が勝つ確率はいくらか。ただし、１回のゲームでそれぞれが勝つ確率は、$P(A)=a$、$P(B)=b$、$P(C)=c$ とする（$a+b+c=1$）。

〔本節の解答〕

Q 1 ：B の権利は1/8、A の権利は7/8

Q 2 ：B の権利は1/4、A の権利は3/4

Q 3 ：（省略）

Q 4 ：$p(1-p)^4$

Q 5 ：$10p^3(1-p)^2$

Q 6 ：(a)　w/(n−1)
(b)　bw/{n(n−1)}
(c)　bw(w−1)/{n(n−1)(n−2)}
(d)　w/n
(e)　bw^2/n^2

Q 7 ：(a)　1/8
(b)　1/12
(c)　1/12
(d)　1/4
(e)　$(5/6)^4$ (1/6)
(f)　1/3

Q 8 ：(a)　1/5
(b)　1/10
(c)　3/10
(d)　1/3
(e)　1/6

Q 9 ：$a/(a+b)$

確率の話題

ここで扱った問題は、実際に、1654年 8 月24日付のパスカルからフェルマーに宛てた手紙で論じられている問題です。これは確率の計算というより公平な賞金の分配の問題であり、現在の用語なら「A が受け取る金額の期待値はいくらか」と言い換えても良い。期待値の話題は次節で取り上げます。

以下、パスカルとフェルマーが扱った、もう少し複雑な問題を紹介します。A、B、C の 3 人によるゲームで最初に 2 点取った者が勝つとして、 1 回目に A が 1 点取った時点で中断する場合の公平な分配方法はどうなるでしょうか。

フェルマーの方法では、この場合は決着がつくまでには最大で 3 回のサイコロ投げが必要です。すべての場合を列挙すると次の27通りとなります。

aaa　*aab*　*aac*　*aba*　*abb*　*abc*　*aca*　*acb*　*acc*
baa　*bab*　*bac*　*bba*　*bbb*　*bbc*　*bca*　*bcb*　*bcc*
caa　*cab*　*cac*　*cba*　*cbb*　*cbc*　*cca*　*ccb*　*ccc*

これらが同等に確からしいと考えて、Ａが勝つ場合の数を調べると17通りですから、答えは17/27となります。丁寧に数えるのは多少面倒で間違えやすく、決定木を使う方が確実です。

不思議なことに、パスカルは、勝負がついた後にサイコロ投げを続けると「勝敗が影響される」として、Ａが勝つのは a が１つ以上現れ、b、c が２つ未満の13通りに、abb、bba のように b または c が２回現れる６通りの半分の３通りを加えた16通りとしました。後者の場合は、ＢまたはＣと折半するからです。そうすると、Ａ、Ｂ、Ｃの取り分はそれぞれ、16/27、5.5/27、5.5/27になります。しかし、これはゲームの規則が違う問題の答えであり、パスカルのような天才が誤りを犯したことは謎とされています。なお、パスカルはこの直後に神秘的な体験をして、数学を捨てて信仰を中心とする生活に入りました。

先験的な確率の定義を適用するための「同等に確からしい」という判断は必ずしも容易ではありません。18世紀フランスの書物『百科全書』の著者の１人である数学者のダランベール（Jean Le Rond d'Alembert）は、２枚のコインを投げて２枚とも表になる確率を1/3とする有名な間違いを記してしまいました。ダランベールについて、「区別できないコインに対する可能な結果 HH、HT、TT が同等に確からしいとする」という前提であれば、数学的には誤りとは言えません。しかし、通常は「２枚のコインは区別できる」から、同等に確からしい可能な結果は HH、HT、TH、TT の４通りと想定できます。実際にコインを投げてみれば、多少はゆがみがあっても、この想定に近い結果が得られます。

もう少し複雑な歴史的な例に、ガリレオ（Galileo Galilei）が解いた問題があります。それは３つのサイコロを同時に投げ、その目の和が９になる確率と10になる確率を求める問題で、やはり３つのサイコロを区別することが要点です。単純に数えれば、目の和が９になるのは（1, 2, 6）（1, 3, 5）（1, 4, 4）（2, 2, 5）（2, 3, 4）（3, 3, 3）の６通り、目の和が10になるのも（1, 3, 6）（1, 4, 5）（2, 2, 6）（2, 3, 5）（2, 4, 4）（3, 3, 4）の６通りですが、先験的な確率が適用できる事象を列挙するためには、３つのサイコロを青・赤・白のように区別して考える必要があります。すると、異なる目の出方は $6^3=216$ 通りで、この１つ１つが同等に確からしい。３つの目の組合せを数えると、（1, 3, ６）となるのは６通り、（2, 2, 5）となるのは３通りだから、それらの確率は異なります。この手順を用いると、目の和が９になる確率は（6＋6＋3＋3＋6＋1）/216＝25/216です。同様にして、目の和が10になる確率は（6＋6＋3＋6＋3＋3）/216 ＝ 27/216とわずかに大きいことが分かります。

ところで、量子力学の世界では、区別できないコインに基づく確率が現れる場合があります。２個の粒子がそれぞれ２つの状態を取り得る場合、それらが区別できるならコインと同様に４通りの状態があり、いずれも1/4の確率で生じると考えたいところですが、量子力学においては粒子を区別できず、出現確率は HH、HT、TT が1/3ずつとなる状況があります。

このような場合も含めると、無条件で先験的な確率の定義を適用することには注意が必要です。ただし、日常生活で現れる事例では、近似的には同等に確からしいと想定できるような状況も少なくないので「先験的な確率の定義」による確率の計算は最も基本的な考え方といえます。

最後に、ニュートン（Isaac Newton）が答えた、いくつかのサイコロを投げて６の目が出る確率を求める問題を紹介しましょう。

（A）　６個のサイコロを投げて、少なくとも１つ「６の目」が出る確率

（B）　12個のサイコロを投げて、少なくとも２つ「６の目」が出る確率

（C）　18個のサイコロを投げて、少なくとも３つ「６の目」が出る確率

答えは、次のようになります。式は難しくないけれど、この計算には、ニュートンも疲れたのではないでしょうか。

$$P(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{31031}{46656}\fallingdotseq 0.6651$$

$$P(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{12}-12\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{11}=\frac{1346704211}{2176782336}\fallingdotseq 0.6187$$

$$P(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{18}-18\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{17}-\frac{18\times 17}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{16}=\frac{6066641080916}{10155995668460}\fallingdotseq 0.5973$$

2　保険料をどのように決める？［確率の応用］

確率の考え方が実際に応用されている例として、保険の話題を取り上げる。

◇ 期待値

住宅と家財を含めて2000万円の資産価値があり、１年間に火災などの原因でその価値が失われる確率が１％である場合を考えよう。個人が火災などのリスクを負担すると、１％の確率とはいえ、その損害は重大である。確率を考慮するとき、重大な損失を防ぐためには、どの程度の金額を用意しておけば良いのだろうか。保険の制度は、このような問題に対する１つの解答である。その仕組みを理解するためには、**期待値、標準偏差、大数の法則**などが役に立つ。

ある「くじ」から得られる賞金をどれだけ期待できるかを表す数値が期待金額であり、**確率変数の期待値**の本来の意味である。次のくじについて考えよう。

１から100までの番号がついた100個の玉が入っている箱の中から（毎回、元に戻しながら）玉を１個取り出す。賞金 u の額は、番号が１から60のときは $u_1=0$、60から90のときは $u_2=1$、91から100のときは $u_3=10$とする（単位は千円）。

（１）　このくじを１回引いて、u_1、u_2、u_3という結果が起きる確率は、それぞれ、$p_1=0.6$、$p_2=0.3$、$p_3=0.1$と考えてよい。

（２）　このくじを $n=10$回引いて、u_1、u_2、u_3となる回数をそれぞれ、n_1、n_2、n_3（$n_1+n_2+n_3=n$）とする。n回のくじから得られる金額の合計は、$u_1n_1+u_2n_2+u_3n_3$で与えられる。n_1、n_2、n_3は確率的に変動するから、合計金額も確率的に変動する。

（３）　ここで、n を大きくして100万回と想定してみよう。このとき $u=u_1$、u_2、u_3が得られるそれぞれの相対度数 $f_1=n_1/n, f_2=n_2/n, f_3=n_3/n$ は、それぞれ、確率 $\mathrm{P}(u=u_1)=p_1=0.6$、$\mathrm{P}(u=u_2)=p_2=0.3$、$\mathrm{P}(u=u_3)=p_3=0.1$に近いと考えて良い。

（４）　多数回のくじから得られる１回当たりの金額は、$(u_1n_1+u_2n_2+u_3n_3)/n=u_1f_1+u_2f_2+u_3f_3$と求められ、これは近似的に $u_1p_1+u_2p_2+u_3p_3$に等しい。

（５）　確率変数 u の期待値は $\mathrm{E}(u)=u_1p_1+u_2p_2+u_3p_3$と定義され、$n$ が大きい場合の１回当たりの金額と解釈できる。

以下、本節では、確率変数を x, u などの小文字で表す。特に区別する場合には、$\tilde{x}$を確率変数、x をその実現値と表現する。これはベイズ統計学では標準的な表記法である。

確率変数の期待値（定義と解釈）

確率変数 x が、確率 $p_1, p_2, \cdots$（$p_1+p_2+\cdots=1$）で $x_1, x_2, \cdots$という値をとるとき、x の期待値 $\mathrm{E}(x)$は次の式で定義される。

$$\mathrm{E}(x)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots=\sum_i x_ip_i$$

ここで、E は expectation の頭文字である。また、平均（mean）の頭文字 m に対応するギリシア文字μが、期待値の標準的な記号である。$p_i=p(x_i)$ と書いて、$\mu=\sum_x xp(x)$という表現もよく用いられる。

確率変数 x について、実験を n 回行った観測結果で、$x_1, x_2, \cdots$となる度数をそれぞれ、$n_1, n_2, \cdots$として、相対度数をそれぞれ、$f_1=n_1/n, f_2=n_2/n, \cdots$とすると、算術平均は $\bar{x}=(n_1x_1+n_2x_2+\cdots)/n=f_1x_1+f_2x_2+\cdots$として与えられる。ここで、$n$ が大きくなるとき、$f_1, f_2, \cdots$はそれぞれ、確率 $p_1, p_2, \cdots$に近づき、$\bar{x}$は期待値μに近づく。

宝くじの期待値

１枚300円のある宝くじの賞金と当選確率は表１のように与えられている。

表１　宝くじの賞金・当選確率と期待値および分散の計算

賞	賞金	当選確率	u	$p(u)$	$up(u)$	$(u-\mu)^2p(u)$
１等	3億円	1/1000万	3×10^8	$1/10^7$	30	9.0000×10^9
１等前後	1億円	1/500万	1×10^8	$2/10^7$	20	2.0000×10^9
２等	1千万円	1/250万	1×10^7	$4/10^7$	4	3.9999×10^7
３等	10万円	1/1万	1×10^5	$1/10^4$	10	9.9732×10^5
４等	1万円	1/500	1×10^4	$2/10^3$	20	1.9468×10^5
５等	2000円	1/100	2000	1/100	20	3.4820×10^4
６等	300円	1/10	300	1/10	30	2.7556×10^3
外れ	0円	（*）	0	0.8878993	0	1.5943×10^4
		注：（*）は差で求める	合計	1.0000	$\mu=134$	1.1041×10^{10}

このくじの賞金を u として、その期待値を計算すると、表の右側のように $\mu=\mathrm{E}(u)=134$円となる。現金300円を持っているより損をしているが、宝くじは夢を買うものとされる。

◇ 確率変数の分散と標準偏差

期待値が度数分布から計算される平均値の極限とするのと同様、度数分布から計算される分散の極限を確率変数の分散とすることも自然に理解できるだろう。

x の観測値からは、分散は次の式で計算される。

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots\right\}=\frac{1}{n}\sum_i n_i(x_i-\bar{x})^2=\sum_i f_i(x_i-\bar{x})^2$$

ここで、n が大きくなると $f_i\fallingdotseq p_i$ となることから、確率変数 x の分散は、次の式で定義する。

確率変数の分散（および標準偏差）

確率変数 x が、確率 $p_1, p_2, \cdots(p_1+p_2+\cdots=1)$ でそれぞれ、$x_1, x_2, \cdots$ という値を取るとき、確率変数 x の分散は、$\mu=\mathrm{E}(x)$ として、次の式で定義される。

$$\sigma^2=\mathrm{V}(x)=p_1(x_1-\mu)^2+p_2(x_2-\mu)^2\cdots=\sum_i p_i(x_i-\mu)^2=\sum_x p(x)(x-\mu)^2$$

分散の平方根 σ を確率変数 x の標準偏差と呼ぶ。ここで V は分散の英語（variance）の頭文字、σ は標準偏差の英語（standard deviation）の頭文字 s に対応するギリシア文字である。

宝くじの標準偏差

表１の宝くじの賞金の標準偏差を求めてみよう。表の右側で計算されているように、分散は $\sigma^2=1.1041\times10^{10}$である。バラツキの尺度としては標準偏差が理解しやすい単位であり、この例では $\sigma=105077.3$円である。期待値は134円と小さいが、最高の賞金が大きいため、標準偏差が大きくなっている。$\sigma\fallingdotseq0$なら確実に損をするが、結果が大きく変化する可能性が夢を表していると考えられる。

◇ 確率変数の和

2つの確率変数 x と y が独立のとき、その和 $T=x+y$ について、x と y の期待値を $\mathrm{E}(x)=\mu_x$、$\mathrm{E}(y)=\mu_y$、分散を $\mathrm{V}(x)=\sigma_x^2$、$\mathrm{V}(y)=\sigma_y^2$とするとき、T の期待値と分散は $\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(y)=\mu_x+\mu_y$、$\mathrm{V}(T)=\mathrm{V}(x)+\mathrm{V}(y)=\sigma_x^2+\sigma_y^2$と求められる。

さらに、一般に次の結果が知られている。

> **独立な変数 x, y の一次式 $L=ax+by$ の期待値と分散**
> $\mathrm{E}(L)=\mathrm{a}E(x)+\mathrm{bE}(y)=\mathrm{a}\mu_x+\mathrm{b}\mu_y$、$\mathrm{V}(L)=\mathrm{a}^2\mathrm{V}(x)+\mathrm{b}^2\mathrm{V}(y)=\mathrm{a}^2\sigma_x^2+\mathrm{b}^2\sigma_y^2$
> 類似の結果は3つ以上の確率変数の場合にも成り立つ。

たとえば、互いに関係のない（独立な）2つのくじ x, y について、期待値と標準偏差が $\mu_x=70$、$\mu_y=65$、$\sigma_x^2=10^2$、$\sigma_y^2=15^2$とするとき、合計 T については、期待値が $\mathrm{E}(T)=70+65=135$、分散が $\mathrm{V}(T)=100+225=325$となる。

したがって、標準偏差は$\sigma_T=\sqrt{325}\fallingdotseq 18.03$である。

表1の宝くじを100枚買うときの期待値を計算してみよう。発売されるくじの枚数が1000万枚と大きければ、100枚のくじの結果を独立な確率変数とみなすことができる。ただし、1等前後賞があるので、連続番号のくじは買わないものとする。それぞれの宝くじの賞金の期待値はいずれも134円となり、合計で13400円が期待金額である。1枚当たりにすると、何枚買っても期待金額には変化がない。ところで分散は100倍になり、標準偏差はその平方根だから10倍、1枚当たりにすると10分の1になる。つまり、夢が小さくなる。100枚ではなく、10000枚買えば標準偏差は100分の1の1050.7円とさらに小さくなる。あまりたくさん買うと独立な結果とはみなせなくなるが、買い占めた場合を考えれば、標準偏差はゼロとなるから、正確に1枚当たりの期待値134円を受け取り、確実に損をする。

◇ 保険の役割

火災保険の例も、くじの1種と考えることができる。個人については、期待損失額は表2のように計算される。

表2　期待損失額の計算（単位：万円）

事象	損失額（u）	確率（p）	積（up）
無事	0	0.99	0
災難	2000	0.01	20
合計		1.00	20

災難が起きる確率が小さいので、損失額の期待値（**期待損失額**）は20万円と、それほど大きくはならないが、多くの人は、災難が起きる場合、2000万円という大きなリスクを個人で負うことは賢明ではないと考える。リスクを少なくする方法の1つが火災保険の制度で、1年間20万円程度の保険料を支払うことによって、万一、損害が発生した場合には2000万円の保険金を受け取ることができる。

保険の仕組みを理解するために、同じような状況の人が n 人いて、少しずつお金を出し合って、そのお金を災

難が起きた人に提供して経済的に助け合う制度を考えよう。

n 人の中で１年間に災難が発生する件数は、裏が出る確率が $p=0.01$ のゆがんだコインを n 回投げる実験で裏が出る回数とみなすことにしよう。火災の発生確率が等しく、それぞれの火災発生が独立であれば、この想定は合理的である。１年間に災難が発生する件数を x とすると、損失額の合計は $u=2000x$ となる。ここで、二項分布に従う x の期待値は $E(x)=np$ だから、損失額の期待値は $E(u)=2000np$ となる。$n=100$ 人のときは、期待値は $E(x)=np=1.0$（件）、$E(u)=2000E(x)=2000$ 万円となる。これを $n=100$ 人で割ると１人当たり $E(u/n)=20$（万円）となって、表２の期待値と変わらない。

表３　$n=100$ 人のとき、$x=0, 1, \cdots, 8$ までの確率（%）小数点以下３桁まで

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=7$	$x=8$
確率	36.603	36.973	18.486	6.100	1.494	0.290	0.046	0.006	0.001
累積	36.603	73.576	92.063	98.163	99.657	99.947	99.993	99.999	100.000

また、x の確率は表３で与えられる。この表によると、損害が９件以上となる確率は10万分の１より小さい。仮に、10件の損害が発生したとしても、１人当たりの負担額は2000万円 ×（10/100）＝200万円で収まる。個人で2000万円の損害が発生する確率１％と同じ水準の危険なら４件以下となり、その場合の１人当たりの負担額は2000万円 × 4/100＝80万円となる。このように、$n=100$ 人でもある程度のリスクの軽減ができているが、数十万人、数百万人と大勢になれば、１人当たりの損害負担額は、期待金額とほとんど変わらないことが予想できるだろう。これは、確率論の重要な定理である**大数（たいすう）の法則**（law of large numbers）によって保証される。

現実には、このような契約は保険会社が提供しているもので、期待損失額に管理経費を加えた程度の保険料を受け取ることで、保険会社の健全な経営が可能となる一方、契約する個人にとっては、大きな損失の可能性というリスクを軽減することが可能となっている。

◇ 生命保険の仕組み

生死や病気、ケガなど人に関わる生命保険も同様な原理による。保険に加入している人が死亡した場合に、残された家族に必要な保険金が支払われるのが死亡保険である。

近代的な生命保険が生まれるまでの歴史

中世ヨーロッパでは、商人たちは職業ごとに同業者組合「ギルド」を作り、冠婚葬祭など組合員の経済的マイナスを組合全体で分担しあっていたことから、このギルドを生命保険の起源とする説があります。17世紀のイギリスにおいて、教会の牧師たちが組合を作り、自分たちに万が一のことがあった場合に遺族へ生活資金を出すために保険料を出し合う制度を始めました。しかし、この制度では全員が同じ金額の保険料を支払っていました。人の死亡率は年齢とともに上がっていくので、若い人よりも年をとった人の方が有利となったため、組合はほどなく解散することになりました。その後、イギリスのジェームス・ドドソンという数学者によって、公平な保険料分担の方法が発見され、1762年に世界で初めて近代的な保険制度に基づく生命保険会社が設立されました。日本においては、福沢諭吉による「西洋旅案内」で初めて生命保険が紹介された後、1881年に欧米の近代的保険制度を手本として生命保険会社が設立されました。

（生命保険協会ホームページの解説による）

生命保険においては、保険料（収入）と保険金（支出）が等しくなることが基本で、仮に保険金と保険料を一律に定めると、以下の関係が成り立つ必要があります。

保険金×死亡者数＝保険料×契約者数

Q 1 ：さまざまな年齢の男女100万人が構成している集団を考える。この集団の構成員が１人死亡するたびに、生命保険会社がその家族に100万円を支払う場合、構成員１人が負担すべき保険料はいくらになるか。ただし、この集団の死亡率は２％とし、保険料は全員同じとする。

実際の死亡率

厚生労働省によって、毎年の出生者数、死亡者数などが報告されています。

2014（平成26）年の死亡数は127万3004人で前年より4568人増加し、死亡率（人口千対）は、10.1で前年と同率です。死亡数と死亡率の年次推移をみると、明治から大正にかけて、死亡数は90万～120万人、死亡率は20台で推移してきました。昭和に入って初めて死亡率は20を割り、1941（昭和16）年に死亡数は115万人、死亡率は16.0まで低下しました。第２次世界大戦後の1947年に死亡数は114万人、死亡率は14.6でしたが、医学や医療の進歩および公衆衛生の向上などにより死亡の状況は急激に改善され、1966年には死亡数が最も少ない67万人、1954年には死亡率が最も低い6.0となりました。その後、人口の高齢化を反映して緩やかな増加傾向に転じ、2003年に死亡数は100万人を超え、死亡率も上昇傾向にあります。また、年齢階層でみると、14歳以下の死亡数は、明治から昭和初期にかけて多かったが、戦後、急激に減少しています。近年では人口の高齢化を反映して65歳以上の死亡数が増加し、特に80歳以上の死亡数の増加は顕著で、全死亡数に占める割合は増加しており、2014年では60.0％となっています。なお、2014年の性別死亡率（人口千対）は男10.8、女9.5です。これを都道府県別にみると、死亡率が最も低いのは、男では沖縄県が8.7、次いで、神奈川県9.0、東京都9.1、女では沖縄県が7.4、次いで、神奈川県7.6、埼玉県7.8です。また、最も高いのは男では秋田県15.5、次いで、青森県14.3、島根県14.1、女では秋田県で13.8、次いで、高知県と山形県で13.2となっています。都道府県別にみた死亡率と65歳以上人口割合は、ほぼ同様の傾向です。

「2014年我が国の人口動態（平成26年までの動向）」
http://www.mhlw.go.jp/toukei/list/dl/81-1a2.pdf

これによると、医療の進歩などによって死亡率は減少してきたものの、年齢別・性別に違いがあることが分かります。

都道府県別にみた死亡率と65歳以上人口割合を、次の方法で比較してみよう

1．横軸に都道府県、縦軸に死亡率と65歳以上人口割合をとる棒グラフと折れ線グラフの組み合わせ
2．横軸に65歳以上人口割合、縦軸に死亡率をとる散布図
3．高齢者が多い地域の死亡率が高いことが確認できただろうか

図１　性別・年齢別死亡率の変化

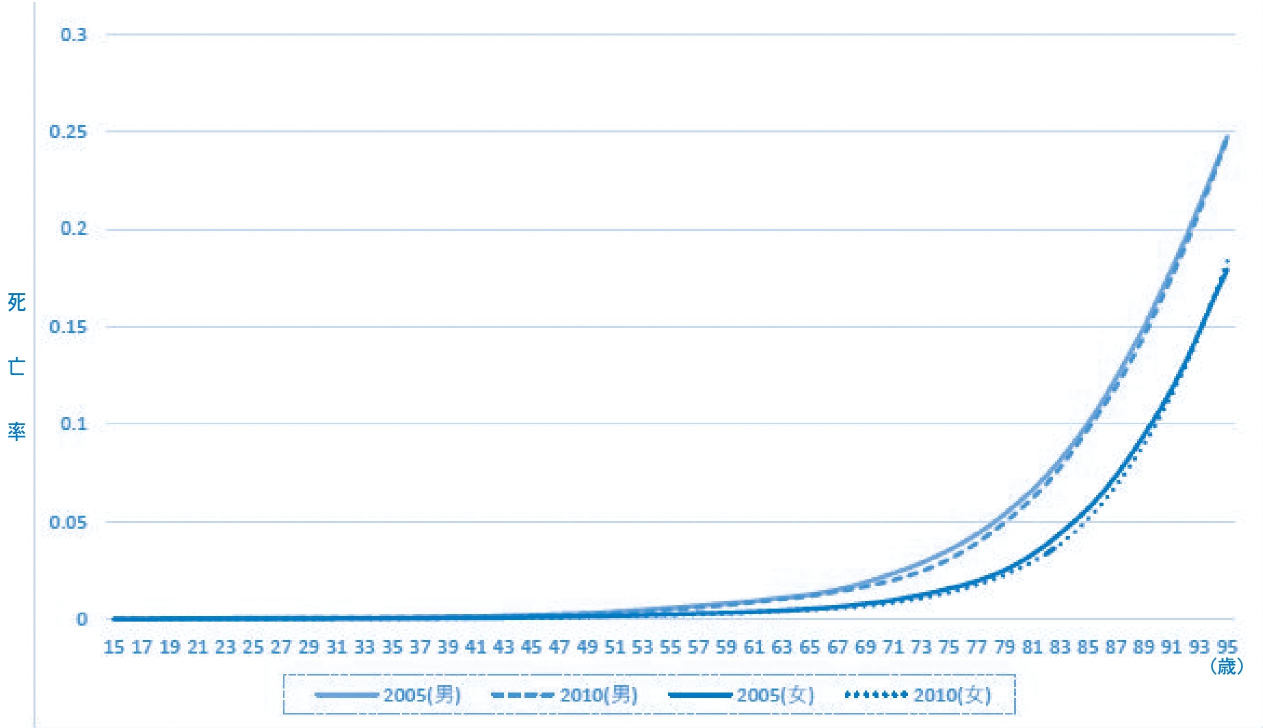


図１は15歳から95歳まで年齢ごとの死亡率で、ある年齢に達した人が１年以内に死亡する割合として求められている。これは無作為に選ばれた人の死亡確率と考えて良い。死亡率には男女間で差があるが、2005年と2010年の比較では、性別・年齢別に比較的安定している様子が見える。なお、若い年齢層の違いはグラフでは読み取りにくいので、５歳ごとの死亡率を表４に記している。これを見ると、死亡率は15歳以上では年齢とともに増加し、また、男より女の方が一貫して低いことが分かる。たとえば、2005年の15歳・男の死亡率は0.00023で、これは2010年の20歳・女の死亡率0.00024に近い。

性別・年齢別の調整　Ｑ１の例では集団全体の死亡率を２％と想定したが、実際は、統計から死亡率は年齢とともに高くなることや、同じ年齢でも男性と女性では死亡率が異なることが知られている。そのため、すべての人が同じ保険料を負担すると、不公平となってしまう。「生命保険の誕生」の例でも、この点が原因で継続できなかった。実際には、生命保険会社では契約者の集団における死亡率を年齢別・男女別に計算して、契約者ごとの保険料が公平になるよう算出している。

◇ 大数の法則

保険で公平な保険料を算出するときには、大数の法則と呼ばれる確率の性質が利用されている。ここでは比率に関する大数の法則について説明しよう。

表４　死亡率の比較（2005年、2010年生命表）

年齢	男		女	
	2005	2010	2005	2010
15	0.00023	0.00019	0.00012	0.00012
20	0.00056	0.00051	0.00026	0.00024
25	0.00067	0.00064	0.00032	0.00026
30	0.00074	0.00069	0.00037	0.00036
35	0.00098	0.00085	0.00053	0.00048
40	0.00143	0.00128	0.00075	0.00071
45	0.00227	0.00198	0.00113	0.00108
50	0.00357	0.00317	0.00176	0.00167
55	0.00579	0.00507	0.00265	0.00236
60	0.00883	0.00810	0.00364	0.00340
65	0.01277	0.01214	0.00536	0.00498
70	0.02123	0.01842	0.00890	0.00767
75	0.03555	0.03087	0.01574	0.01381
80	0.05998	0.05568	0.02898	0.02600
85	0.10068	0.09785	0.05696	0.05155
90	0.16453	0.16041	0.10563	0.10160
95	0.24758	0.24695	0.17947	0.18367

比率に関する大数の法則

１回の実験で事象Ａが起きる確率を p とするとき、この実験を独立に n 回繰り返したときに事象Ａが x 回起きたとすると、n が大きくなるに従って、相対度数 $\hat{p}=x/n$ は確率 p に近づく。

この問題では、x は二項分布に従う確率変数であり、期待値は $\mathrm{E}(x)=np$、分散は $\mathrm{V}(x)=np(1-p)$ となる。なお、相対度数の記号として $\hat{p}=x/n$ を用いて、観測された $\hat{p}$ によって未知の p を推定するという意図を表している。標準偏差は分散の平方根で $\mathrm{sd}=\sqrt{np(1-p)}$ だから、相対度数 $\hat{p}=x/n$ はその期待値である p から $\sqrt{p(1-p)/n}$ の数倍程度しか離れないという解釈ができる。

ここで必要なのは相対度数 $\hat{p}=x/n$ の期待値が $\mathrm{E}(\hat{p})=\mathrm{E}(x)/n=p$ となることと、標準偏差が $\mathrm{sd}=\sqrt{p(1-p)/n}$ となることである。これから、$\hat{p}$ と、その期待値である p との距離は $\sqrt{p(1-p)/n}$ の数倍程度と考えることができて、この距離は n が大きくなればゼロに近づく。以上が大数の法則が成立する理由である。前節で相対度数による確率の定義を紹介したが、大数の法則から、この定義の正当性が保証される。

保険に関して、一人ひとりの死亡を予測することはほとんど不可能だが、社会全体として死亡率は非常に安定している。このことが保険会社が死亡率を利用して保険料を定めることを可能にしている。現実には、性別・年齢別の各集団で保険会社が支払い義務のある保険契約者の数は、数万人程度である。そこで、集団の大きさと死亡率を想定して、いくつかの場合に死亡者数 x の期待値 np とその標準偏差(sd) $\sqrt{np(1-p)}$ を計算すると、表５のようになる。

表５　集団の大きさ（人）・死亡率と死亡者数の期待値・標準偏差・変動係数

n	p	np	sd	cv	n	p	np	sd	cv
20,000	0.0005	10	3.16	0.316	50,000	0.0005	25	5.00	0.200
20,000	0.001	20	4.47	0.223	50,000	0.001	50	7.07	0.141
20,000	0.002	40	6.32	0.158	50,000	0.002	100	9.99	0.100
20,000	0.005	100	9.97	0.100	50,000	0.005	250	15.77	0.063
20,000	0.01	200	14.07	0.070	50,000	0.01	500	22.25	0.044
100,000	0.0005	50	7.07	0.141					
100,000	0.001	100	9.99	0.100					
100,000	0.002	200	14.13	0.071					
100,000	0.005	500	22.30	0.045					
100,000	0.01	1000	31.46	0.031					

最後の列は標準偏差を期待値で割った変動係数 $\mathrm{cv}=\mathrm{sd}/np=\sqrt{(1-p)/np}$ であり、cv は相対的な変動を表すものである。cv をみると、集団の大きさが10万人であれば、どの死亡率に対しても期待値の10％程度の変動であり、十分安定していることが分かる。一方で、２万人程度の場合は相対的な変動が大きいため、支払う保険金額が大きくなって経営が不安定となる可能性がある。契約者数が少ない場合は、このように死亡者数の変動幅が比較的大きいため、現実の保険料は経営の安全性を見込んで、標準偏差の２倍程度と大きめに設定することが多い。

〔本節の解答〕

Q１：１人当たりは100万円×（100万人×0.02）÷100万人＝２万円となる。

3　確率の意味するもの［確からしさの実践］

◇ 生まれてくるこどもの性別

ある家族に次に生まれてくる子どもが男の子である確率は1/2だろうか。実際に、男女の比率は等しいかどうか調べてみよう。「男女の生まれる確率が等しい」ときは、ゆがみのないコイン投げと同様に、二項分布を用いて確率を計算することができる。

◇ 歴史的な例

1629年～1710年にロンドンで生まれた子どもの数は5000人から15000人の間だったが、比率（男／女）は表１のとおりであり、82年間のすべての年について男が多い。男女の生まれる確率が等しければ、男が女より多い確率と、女が男より多い確率は等しい。そのとき、82年続けて男が多くなる確率は近似的に$1/2^{82}=2.067952\times10^{-25}$であり、これは極端に小さい。このような小さな確率で発生する事象が実際に起きたときに、単に珍しいとするのではなく、確率を計算する前提とした「男女の生まれる確率が等しい」という想定（これを**仮説**と呼ぶ）を疑うのが、**統計的仮説検定**の考え方である。

表１　ロンドンで1629年～1710年に生まれた子どもの性別比率（男／女）

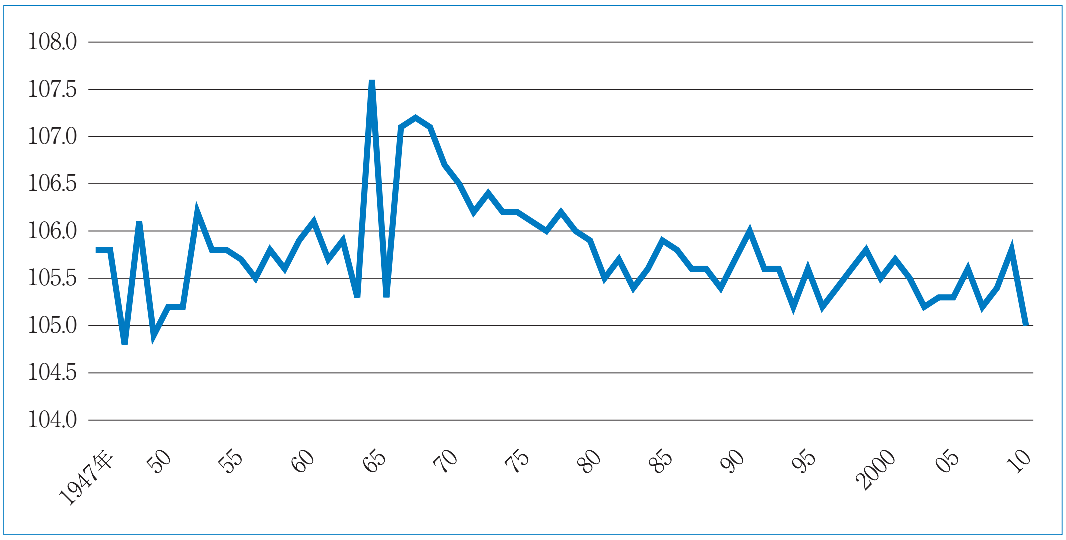
1.114	1.090	1.078	1.088	1.066	1.045	1.036	1.068	1.055	1.082	1.122	1.035	1.052
1.112	1.038	1.028	1.033	1.110	1.074	1.057	1.121	1.062	1.138	1.107	1.080	1.082
1.091	1.085	1.033	1.048	1.154	1.147	1.156	1.086	1.109	1.063	1.053	1.083	1.055
1.092	1.116	1.098	1.064	1.053	1.043	1.065	1.060	1.121	1.035	1.089	1.034	1.040
1.044	1.024	1.059	1.063	1.033	1.064	1.072	1.054	1.061	1.083	1.037	1.039	1.026
1.051	1.082	1.056	1.038	1.105	1.062	1.073	1.078	1.049	1.011	1.065	1.075	1.072
1.090	1.081	1.062	1.048									

◇ 日本の出生性比

人口学では、生まれてくる子どもについて、100×（男／女）を**出生（しゅっしょう）性比**と呼ぶ。図１を見ると、第２次世界大戦後の日本については、出生性比は105から107の近くで比較的安定している。65年間連続で男が多い確率は近似的に$1/2^{65}=2.710505\times10^{-20}$であり、これも非常に小さいため、日本についても「男女の生まれる確率が等しい」とは言えない。

なお、特定の家族では、あらかじめ子どもの男女比を知ることはできないが、日本全体でみると男女の比率は非常に安定している。ここでも、**大数の法則**の傾向が確かめられる。

図１　日本の出生性比（1947年～2011年）



◇ 仮説検定の考え方

以上の計算では、非常に確率の小さな事象が発生したため「男女の生まれる確率が等しい」という仮説を疑った。しかし、単に確率の小さな事象を観測しただけでは、仮説を疑うことはできない。子どもの数を２、４、10、100、1000と増やしていくと、ちょうど半数が男となる確率は、0.5、0.375、0.24609375、0.07958924、0.02522502と次第に小さくなる。もし、100万人の新生児のうち、ちょうど50万人が男だったら、この仮説をおかしいとは考えないであろう。しかし、その確率は0.0007978844とかなり小さい。したがって、男の生まれる確率が1/2であるという仮説を疑う根拠については、さらに考える必要がある。男が半数より多い年を数える場合でも、「65年中、63年は男が多い」、「65年中、62年は男が多い」などの結果が得られたときに、仮説を疑うべきだろうか。伝統的な統計学では、ある結果が起きたとき「それと同等以上に珍しい結果すべてを合わせた確率が小さいとき」に仮説を疑う。これを**すその確率**（tail area probability）と表現する。

二項分布 $B(n,\ p)$ における仮説検定

実際の観測値 x_{obs} に基づいて、確率に関する仮説 $H : p = p_0$ の妥当性を判断する手順は、以下のようになる。

$B(n, p_0)$ において、確率変数 x が $|x - np_0| \geq |x_{obs} - np_0|$ を満たす確率を計算して、これが非常に小さい場合に仮説を疑う。

ここで np_0 は、仮説が正しいときの確率変数 x の期待値であり、np_0 に近い x の確率が大きくなる。統計学ではすその確率を **P 値**（または p 値、P-value）と呼ぶ。

例：ある実験の成功確率が $p_0 = 0.8$ という仮説を考える。$n = 1000$ 回のうち $x_{obs} = 780$ 回が成功だったとすると、$np_0 = 800$ だから、二項分布 $B(n, p_0)$ において $|x - np_0| \geq |x_{obs} - np_0| = 20$、すなわち、$x \leq 780$ または $x \geq 820$ となる確率である P 値を求める。その結果は0.126と、かなり大きいため、仮説を疑う根拠は小さい。なお、この場合でもちょうど $x = 780$ となる確率は、0.009とかなり小さいことに注意してほしい。

この例で、もし $x_{obs} = 760$ 回が成功だったとすると、P 値は0.0022となり、仮説は強く疑われる結果となる。

ひのえうまの出生比率

図１を見ると、1965年から1967年にかけて、105.3、107.6、105.3という例外的な変動を示しています。この時期の出生数は180万人から200万人程度だったのが、この３年間の出生数は、1,823,697人、1,360,974人、1,935,647人と激しく変動していて、1966年が激減しています。1966年に生まれた男は705,463人、女は655,511人でした。1961年から1970年の10年間の平均では出生性比は106.3、男が生まれた比率は$106.3/(100+106.3)=0.515269$です。これを1966年に男が生まれる確率として、仮説$p=p_0$（$=0.515269$）に対するＰ値を計算してみましょう。期待値は$np_0=1360974\times0.515269=701268$だから、$|x-np_0|\geq|x_{obs}-np_0|=4195$となる確率を求めると、$6.15951\times10^{-13}$と、Ｐ値は非常に小さい。つまり1966年の出生比率が他の年と違っているのは偶然とは考えられません。

その原因が「丙午（ひのえうま）」の迷信によって女の子が困らないように配慮した人たちの行動によるものであることはよく知られています。丙午の年には出産を控えただけでなく、年初や年末に生まれた女子の出生届を前後の年にずらした可能性が高いと考えられます。

◇ ベイズの公式

次の問題を考えよう。

Ｑ１：ある試験の受験者に占める女性の割合は0.6で、合格率は女性が0.4、男性が0.3であった。合格者のうち女性の割合はいくらか。

これは確率ではなく、比率の問題であり、容易に解くことができる。次の問題はどうだろうか。

Ｑ２：ある試験の受験者に占める女性（F）の割合は0.6で、合格率は女性が0.4、男性（M）が0.3であった。合格者（E）の受験票を１枚取り出したとき、それが女性である確率$\mathrm{P(F|E)}$はいくらか。

これらの２つの問題がそっくりなのは、Ｑ２では受験票を繰り返し抜き出す実験を想定することができて、相対度数による確率の解釈が自然にできるからである。

もう少し一般的に拡張した次の問題を考える。

Ｑ３：$\mathrm{F_1, F_2, \cdots, F_m}$を排反全事象（$\mathrm{F_1, F_2, \cdots, F_m}$は互いに排反で、そのうちの１つが必ず起きる）とする。確率$\mathrm{P(F_1), P(F_2), \cdots, P(F_m)}$および、各$\mathrm{F_j}$が与えられたときの事象Eの条件付き確率$\mathrm{P(E|F_j)}$（$\mathrm{j=1, \cdots, m}$）が与えられている。事象Eが起きたときの事象$\mathrm{F_i}$の条件付き確率$\mathrm{P(F_i|E)}$はいくらか。

Ｑ４：（病気の診断）友人が住んでいる地域で、ある病気に感染している人の割合は0.1％である。最新のデータベースによれば、血液検査で陽性（A）になる確率は、感染している（M）とき $P(A|M)=0.8$、感染していない（$\overline{M}$）とき $P(A|\overline{M})=0.1$ である。昨日、友人が検査を受けたところ陽性と告げられた。友人が感染している確率 $P(A|\overline{M})$ はいくらと判断したらよいか。

Ｑ５：（病気の診断、つづき）友人がさらに別な検査を受けたところ、その結果は陽性であった。この検査で陽性（B）になる確率は、感染している（M）とき $P(B|M)=0.9$、感染していない（$\overline{M}$）とき $P(B|\overline{M})=0.2$ である。友人が感染している確率 $P(M|A\cap B)$ はいくらと判断したらよいか。なお、検査結果の事象Ａと事象ＢはM, $\overline{M}$ のいずれのときも、確率的に独立と想定してよい。

◇ 判断確率の考え方

Ｑ４とＱ５の例では、感染しているかどうかは、精密な検査を受ければ確定している。したがって、同じ友人について実験を繰り返しても、Ｍか $\overline{M}$ かは変らない。つまり、友人が病気である確率を相対度数によって理解することは難しい。このように、特定の人に対して病気の可能性を確率で表現することは妥当なのだろうか。

ベイズ統計学では、相対度数ではなく、**判断確率**（**主観確率**ともいう）による定義を用いる。そこでは、合理的な行動に関する基準から、判断の根拠となる指標が導かれ、それが確率の法則を満たすことが導かれている。簡単な例で判断確率の考え方を紹介しよう。

◇ 判断確率の構成

今日の夕方の天気に関する問題を考える。可能な結果は F_1（雨）、F_2（曇りまたは晴れ）の２通りとする。ここで、ある人「あなた」に２つのくじを提供する。賞金はいくらでもよいが、小さな額とする。くじ ℓ_1 では、天気が雨のときに賞金を受け取り、曇りまたは晴れのときは受け取れない。くじ ℓ_2 は次のように作る。箱の中に100個の玉があり、そのうちａ個が赤、それ以外は白とする。この箱をよくかき混ぜて１個を取り出し、それが赤のときだけ賞金を受け取る。$a=100$ の場合、ℓ_2 を選べば確実に賞金がもらえる。$a=0$ の場合は、天気に関する判断に関わらず ℓ_1 を選ぶのが合理的である。ａの値を変えていって、ある値で、どちらのくじでも同じ程度に好ましいと判断する場合、そのａが事象 F_1 に関する「あなた」の判断確率である。

判断確率と呼ぶ理由は、「あなた」が天気予報の専門家であるか、最近の天気図や気象衛星の画像を見たなど、持っている情報によって判断が異なる可能性を認めているからである。

Ｑ６：（前節で扱った問題）箱の中に数字を書いた６枚のカードがあり、その数字は、３枚が「１」、２枚が「２」、１枚が「４」である。元に戻さずにカードを取り出して、１枚目を伏せた状態で２枚目に「２」が出た（この事象をＥとする）とき、１枚目が「２」である確率 $P(F_2|E)$ はいくらか。

この問題は、判断確率を理解するために有用である。１枚目のカードを取り出す手順から $P(F_2)=2/6$ は明らかであり、伏せてあるカードの数字は、２枚目を見ても変化しない。それにも関わらず判断確率は変化する。

１枚目のカードが伏せてある状態で、その数字が「２」である確率を問う問題で、相対度数の定義を使う場合、繰り返し実験とは、そのカードを開いてみることに対応する。この実験は何回繰り返しても、数字が「２」の相対度数は０または１である。一方、判断確率であれば、ベイズの公式に従って、自然に確率の評価が修正される。極端な場合、残りのカードをすべて取り出してみれば、伏せてあるカードの数字は確率１で当てることができる。

このように、判断確率を認める立場では、追加的な情報が与えられれば確率が変化することがある。その合理的な更新の手順を与えるものがベイズの公式であり、これは、正確には、個人の合理的行動に関する公理体系から導かれる定理である。

◇ 相対度数による確率と判断確率

厳密に考えると、繰り返し可能な実験はほとんど無意味になる。サイコロ投げについては、よく回転させるなどの同じ条件で実験を繰り返す必要があることは、ある目を上にしてそっと置けば、結果は確実にその目になることから分かる。しかし、正確に同じ条件で回転を与えて、同じ位置から転がせば、結果は同一になるから、相対度数による定義は意味がなくなる。病気の例で「ある人の検査の結果が陽性（A）であったとして、実際に病気（M）である確率はいくらか」という問題でも、同じ人に検査を繰り返しても病気であるか健康であるかは変わらず、相対度数は０または１だから、判断としての確率以外は意味を持たせることは難しい。

◇ 判断確率の表記

確率の評価は前提となる知識 H によって異なることを明示的に表すため、ある命題 F の判断確率を、$P(F|H)$ と書くことがある。追加的な情報 E が与えられたときの判断確率は $P(F|H\cap E)$ と書くことになるが、この事後確率を求める手順がベイズの定理である。ただし、事前情報 H を固定して議論を進める場合には H を省略して、$P(F)$ や $P(F|E)$ と略記しても混乱はない。

◇ 独立性と情報

新たな情報である E を観測しても、判断確率 $P(F)$ が変化せず、$P(F|E)=P(F)$ となる場合があるだろうか。ベイズの公式 $P(F|E)=P(F\cap E)/P(E)$ の分母を払うと $P(E)P(F|E)=P(F\cap E)$ である。これを、通常の独立性の定義である $P(E)P(F)=P(F\cap E)$ と比較すると、$P(F|E)=P(F)$ が成り立つのは、E と F が独立の場合であることが分かる。事象 E と事象 F が無関係であれば、追加的な情報はないため、判断確率も変化しないのは当然である。

◇ 事象と命題

判断確率の場合は、繰り返しを想定する**事象**（event）だけではなく、原理的に繰り返せないような**命題**（proposition）に関しても、確率を考えることができる。たとえば、「紫式部が宇治十帖を書いた」という命題の確からしさについては、相対度数の考え方は適用できないが、判断確率であれば適用することができる。実際、文献の著者に関する判断確率は次第に利用される機会が増えてきている。

Q７：（３つの箱のパラドックス）
箱 B_1, B_2, B_3があり、それぞれの中身は B_1：(G, G)、B_2：(S, S)、B_3：(G, S) とする（G, S はそれぞれ、金貨、銀貨を表す）。いま、１つの箱を選んだとき、１枚目が金貨だったとすると、２枚目も金貨である確率はいくらか。

Q８：（３人の囚人のパラドックス）仮釈放を申請している３人の囚人 A, B, C は同程度に良好な服役記録がある。判事が３人のうち２人を釈放する決定を下したことは囚人に知れたが、どの２人かは知らされていない。囚人 A は、看守に他の２人の囚人のうち釈放される１人の名前を聞いてみようと考えた。この質問をする前には A は次のように考えた。
　自分が釈放される確率は2/3である。A は、仮に看守が「B は釈放される」と答えたならば、釈放されるのは「A と B」か「B と C」かのいずれかだから、A が釈放される確率は1/2に減ってしまう。
　結局 A は、質問をすることは中止した。しかし、A の計算は誤りである。このことを説明せよ。

〔本節の解答〕

Q１：2/3≒0.67

Q２：2/3≒0.67

Q３：$P(F_i|E)=\dfrac{P(F_i)P(E|F_i)}{\sum_j P(F_j)P(E|F_j)}$

Q４：$(0.001\times0.8)/(0.001\times0.8+0.999\times0.1)\fallingdotseq0.0079$

Q５：$(0.0079\times0.9)/(0.0079\times0.9+0.9921\times0.2)\fallingdotseq0.131$

Q６：$P(F_2|E)=1/5$

Q７：$P(B_1|G)=2/3$

Q８：B と C が釈放される場合に、看守が「B が釈放される」と答える（この命題を b とする）確率 π に依存して A が釈放される（命題 A とする）事後確率が次のように求められる。$P(A|b)=1/(1+\pi)$、特に $\pi=1/2$ なら $P(A|b)=2/3$